

РАЗВИТИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ФОРМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ НАГРУЖЕНИИ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВРЕМЕНИ

В. М. Корнев

(Новосибирск)

При действии нагрузок большой интенсивности на упругие системы наибольшей скоростью роста прогибов обладает собственная форма, отличная от первой [1]. При нагрузках, превышающих нагрузку Эйлера, прогибы упругих систем с течением времени стремятся к бесконечности [1,2]. Поэтому естественно рассматривать такие задачи на конечном отрезке времени. Ниже показано, что при аппроксимации исходной системы с бесконечным числом степеней свободы на конечном отрезке времени системой с конечным числом степеней свободы необходимо принять во внимание плотность собственных движений и информацию о внешних воздействиях. Указан формальный процесс выделения основных движений в задаче о выпучивании стержня. При рассмотрении движения на достаточно большом отрезке времени стержень, на который действует постоянная нагрузка произвольной интенсивности, всегда можно заменять системой с одной степенью свободы, если все коэффициенты ряда Фурье для возмущений отличны от нуля.

Построены примеры, в которых плотность собственных движений упругих систем достаточно велика, последняя существенно зависит от тонкостенности оболочки. Указывается, что на плотность собственных движений оказывает влияние кроме тонкостенности конструкции учет поперечного сдвига в трехслойном или многослойном пакете. Вероятно, оба эти явления подлежат дальнейшему изучению.

Приведены рекомендации по определению критического времени и критической интенсивности нагружения для систем со многими степенями свободы.

1. Рассмотрим процесс выпучивания упругого однородного стержня при постоянном интенсивном нагружении

$$EIw_{,xxxx} + Nw_{,xx} + \rho Fw_{,tt} = f(x) \quad (0 \leq x \leq L, t \geq 0) \quad (1.1)$$

Здесь w — нормальный прогиб; x и t — продольная координата и время; L — длина стержня; ρ — плотность материала стержня; $F = \text{const}$, $I = \text{const}$ — площадь поперечного сечения и изгибная жесткость стержня; E — модуль Юнга; N — заданная постоянная продольная сила; $f(x)$ — функция, определяемая заданными возмущениями или несовершенствами, которые предполагаются малыми (см. (1.14)).

Предположим, что шарнирно опертый стержень до нагружения находился в покое. Тогда начальные и краевые условия имеют вид

$$w = w_{,t} = 0 \quad (t = 0), \quad w = w_{,\bar{x}x} = 0 \quad (x = 0, L) \quad (1.2)$$

Решение задачи (1.1) (1.2) разыскивается в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (1.3)$$

После соответствующих преобразований для $q_m(t)$ получаются уравнения при нулевых начальных условиях

$$q_m'' - \alpha_m^2 q_m = f_m, \quad q_m(0) = q_m'(0) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

$$\alpha_m^2 = \frac{\pi^4 EI}{\rho FL^4} m^2 (\eta^2 - m^2), \quad \eta^2 = \frac{N}{N_e}, \quad N_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad f_m = \frac{2}{\rho FL} \int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

Здесь $\eta \gg 1$ — параметр, характеризующий интенсивность нагружения, N_e — нагрузка Эйлера.

Номерам $m < \eta$ соответствуют движения, описывающие потерю устойчивости

$$q_m = (f_m / \alpha_m^2) (\operatorname{ch} \alpha_m t - 1) \quad (m < \eta) \quad (1.5)$$

Для достаточно больших значений t выражения (1.5) для q_m упрощаются

$$q_m = (f_m / 2\alpha_m^2) \exp \alpha_m t \quad (m < \eta) \quad (1.6)$$

Следуя [1], среди движений с номерами $m < \eta$ выделим определяющее движение, для которого коэффициент в экспоненте достигает наибольшего значения $\alpha^* = \alpha(m_*)$ (здесь m_* — ближайшее к $\eta/2^{1/2}$ целое число; возможен случай, когда $\alpha^* = \alpha(m_*) = \alpha(m_* + 1)$). Очевидно, что при $t \rightarrow \infty$ систему с бесконечным числом степеней свободы можно заменить системой с одной степенью свободы, номер которой m_* , если $f(m_*) \neq 0$. Укажем правило выбора степеней свободы, когда процесс потери устойчивости изучается на конечном отрезке времени $0 \leq t \leq t_0$. Рассмотрим выражения

$$q_m^* = \frac{q_m(t_0)}{\operatorname{ch} \alpha^* t_0 - 1} = \frac{f_m}{\alpha_m^2} \frac{\operatorname{ch} \alpha_m t_0 - 1}{\operatorname{ch} \alpha^* t_0 - 1} \quad (1.7)$$

$$q_m^* = (f_m / \alpha_m^2) \exp(\alpha_m - \alpha^*) t_0 \quad (1.8)$$

Пусть сомножители в выражениях (1.7) и (1.8) для q_m^* можно разбить на классы для конкретного момента времени t_0

$$\frac{\operatorname{ch} \alpha_m t_0 - 1}{\operatorname{ch} \alpha^* t_0 - 1} = O(\eta^{-i}), \quad m = m(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, i_0 \quad (1.9)$$

$$\exp(\alpha_m - \alpha^*) t_0 = O(\eta^{-i}), \quad m = m(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, i_0 \quad (1.10)$$

$$f_m / \alpha_m^2 = O(\eta^{-l}), \quad m = m(l), \quad l = 1, 2, \dots, \infty \quad (1.11)$$

Первые два соотношения зависят от момента времени t_0 и плотности собственных движений в задаче устойчивости сжатого стержня, а последнее соотношение не зависит от времени (если некоторые коэффициенты ряда Фурье равны нулю, то для них в (1.11) $l = \infty$). При $t_0 \rightarrow \infty$ в первый класс $i = 0$ в (1.9) или (1.10) попадает либо одно движение, для которого $m = m_*$, либо два движения, для которых $m = m_*, m_* + 1$. Используя (1.9) и (1.11) или (1.10) и (1.11), легко выделить среди q_m^* основные. Действительно, для q_m^* справедливо сравнение по порядку в фиксированный момент времени

$$q_m^*(t_0) = O(\eta^{-j}), \quad m = m(j), \quad j = j_0, \quad j_0 + 1, \dots \quad (1.12)$$

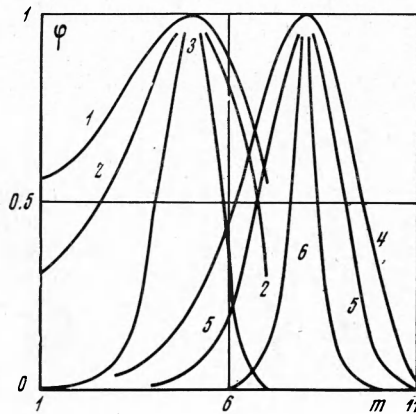
Здесь j — целочисленные параметры. Из соотношений (1.12) определяются номера основных движений $m = m(j_0)$ ($\min j = j_0$). Среди основных движений для достаточно больших значений t_0 обязательно присутствует определяющее движение с номером m_* , если $f_{m_*} \neq 0$.

Используя оценки (1.12), опускаем все второстепенные члены ряда (1.3), причем его основная часть имеет вид

$$w(x, t) = \sum_m q_m(t) \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad m = m(j_0) \quad (1.13)$$

При умеренных временах t_0 и для внешних воздействий, имеющих один порядок малости, функция $w(x, t_0)$ может иметь характер биений по продольной координате.

Укажем, что разбиение на классы в (1.9), (1.10), а соответственно, и в (1.12) зависит от жесткостных характеристик стержня; например, для



трехслойного стержня, имеющего несущие слои с малой изгибной жесткостью, плотность собственных движений при некоторых значениях интенсивности нагружения существенно возрастает по сравнению с плотностью собственных движений для однородного стержня. При интенсивном нагружении трехслойных конструкций с достаточно мягким заполнителем легче проявляются высшие формы потери устойчивости, чем в однородных (см. [2], стр. 806—809 и [3, 4]).

Функция $\varphi(m, t_0, \eta) = \exp(\alpha_m - \alpha^*)$ есть своеобразный внутренний погранслой [5], если за независимую переменную выбрать параметр m ,

а t_0 и η зафиксировать. На фигуре приведены типичные кривые, характеризующие распределение амплитуд форм потери устойчивости относительно определяющего движения в фиксированные моменты времени, когда $f_m/\alpha_m^2 = \text{const} \neq 0$ для $m < \eta$. Кривая 1 построена при $t = t_0$, кривая 2 — при $t = 2t_0$, кривая 3 — при $t = 10t_0$ ($\eta^2 = 50$); кривая 4 — при $t = t_0$, кривая 5 — при $t = 2t_0$, кривая 6 — при $t = 10t_0$ ($\eta^2 = 128$). При более интенсивном нагружении погранслоем, описываемый функцией $\varphi(m, t_0, \eta)$, выражен ярче. При $t \rightarrow \infty$ функция $\varphi(m, t_0, \eta)$ имеет вид $\varphi(m, \infty, \eta) = 1$ при $m = m_*$, $\varphi(m, \infty, \eta) = 0$ при $m \neq m_*$; т. е. как бы «вырезается» всего одно движение [1, 5], если $f_{m_*} \neq 0$.

При решении конкретных задач разбиение на классы, подобное (1.9) или (1.10) и (1.11), не всегда удается осуществить, поскольку границы классов могут «размазываться», но даже и в этих случаях не представляет труда выделить основные движения, используя сравнение по порядку (асимптотический анализ).

Итак, при интенсивном постоянном нагружении стержень всегда можно заменить системой с одной степенью свободы, номер которой $m = m_*$ (см. (1.13)), если отрезок времени достаточно большой ($0 \leq t \leq t_0$), коэффициент ряда Фурье с номером m_* отличен от нуля, т. е. $f_{m_*} \neq 0$. В исключительных случаях стержень заменяется системой с двумя степенями свободы, номера которых $m = m_*$, $m_* + 1$, если t_0 велико, а $f_{m_*} \neq 0$, $f_{m_*+1} \neq 0$.

Рассмотренная выше задача о процессе выпучивания стержня, вероятно, является простейшей среди задач подобного рода. Ниже будут построены два примера, которые показывают, что среди задач по интенсивному нагружению упругих тонкостенных конструкций могут встретиться значительно более сложные; в этих примерах плотность собственных движений

существенно зависит от тонкостенности конструкции, а во втором из примеров, кроме этого, плотность собственных движений связана с неединственностью представления решения.

2. Рассмотрим развитие осесимметричных форм потери устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек при постоянном интенсивном нагружении [2,6]

$$\varepsilon^2 w_{,xxxx} + w + \lambda w_{,xx} + w_{,tt} = f(x) \quad (0 \leq x \leq L/R, t \geq 0) \quad (2.1)$$

Здесь w — нормальный прогиб оболочки, радиус и длина которой R и L , h — толщина оболочки, x и t — продольная координата и время, $\varepsilon^2 = h^2/12(1 - \nu^2)R^2$ — параметр, характеризующий тонкостенность конструкции, ν — коэффициент Пуассона, λ — параметр интенсивности нагружения, $f(x)$ — функция, пропорциональная заданным возмущениям или несовершенствам оболочки (масштаб независимой переменной t подобран так, что коэффициент перед $w_{,tt}$ превратился в единицу).

Пусть до момента приложения интенсивной нагрузки шарнирно опертая оболочка находилась в покое (см. (1.2), где $x = 0, L/R$). Если решение задачи (2.1), (1.2) разыскивать в виде ряда (см. (1.3), где независимая переменная заменена на Rx), то для q_m получаются задачи (1.4), причем коэффициенты уравнения (1.4) имеют вид

$$\alpha_m^2 = \lambda m_1^2 - \varepsilon^2 m_1^4 - 1, \quad m_1 = \frac{m\pi R}{L}, \quad f_m = \frac{2R}{L} \int_0^{L/R} f(x) \sin \frac{m\pi R x}{L} dx \quad (2.2)$$

Далее изучаются движения, описывающие потерю устойчивости, для амплитуд этих движений справедливы формулы (1.5), (1.6) при $m_0 < m < m_{00}$; номерам $m < m_0$, $m > m_{00}$ соответствуют колебания; функции времени $q_{m_0}(t)$ и $q_{m_{00}}(t)$ могут быть полиномами второй степени. Коэффициент α_m имеет максимум при

$$m_{1*}^2 = (m_* \pi R / L)^2 = \lambda / 2\varepsilon^2, \quad \max \alpha_m^2 = \lambda^2 / 4\varepsilon^2 - 1 \quad (2.3)$$

Изучим плотность собственных движений. Эта задача аналогична задаче о числе собственных значений, попадающих в заданный интервал изменения собственных значений [7], с тем лишь различием, что в рассматриваемой задаче необходимо подсчитать число собственных движений (число форм устойчивости), попадающих в заданный интервал изменения α_m (см. (1.7), (1.9)). Из выражения для α_m^2 имеем (см. (2.2))

$$m_1 = \{\lambda / 2\varepsilon^2 \pm [\lambda^2 - 4\varepsilon^2(1 + \alpha_m^2)]^{1/2} / 2\varepsilon^2\}^{1/2} \quad (2.4)$$

Наличие или отсутствие точек (областей) сгущения у функции $m_1 = m_1(\alpha_m^2)$ установим, исследуя производную $\partial m_1 / \partial \alpha_m^2$

$$\partial m_1 / \partial \alpha_m^2 \sim [\lambda^2 - 4\varepsilon^2(1 + \alpha_m^2)]^{-1/2} \quad (2.5)$$

В правой части соотношения (2.5) опущены сомножители, которые не имеют особенностей. Из (2.5) следует, что $\partial m_1 / \partial \alpha_m^2 \rightarrow \infty$ при $\lambda^2 \rightarrow 4\varepsilon^2(1 + \alpha_m^2)$, но именно при $\lambda^2 = 4\varepsilon^2(1 + \alpha_m^2)$ коэффициент в экспоненте достигает максимального значения (см. (2.3)). Итак, в окрестности $m = m_*$ находится область сгущения собственных движений. Обнаруженная область сгущения собственных движений влияет на выбор степеней свободы, когда процесс потери устойчивости изучается на конечном отрезке времени $0 \leq t \leq t_0$. Действительно разбиение на классы (1.9), (1.10) зависит от плотности собственных движений, а последняя определяется

тонкостенностью конструкции. Функция $\varphi(m, t_0, \eta, \varepsilon) = \exp(\alpha_m - \alpha^*) t_0$ есть своеобразный внутренний погранслои [5] (m — независимая переменная, t_0, η и ε фиксированы).

Выражение

$$w(x, t) = \sum_m q_m(t) \sin \frac{m\pi R}{4} x, \quad m = m(j_0, \varepsilon) \quad (2.6)$$

есть основная часть ряда (1.3), причем число членов в сумме (2.6) зависит от тонкостенности конструкции. При решении конкретных задач, когда задана тонкостенность оболочки, подсчет плотности собственных движений в данной задаче затруднений не вызывает.

3. Рассмотрим поведение сферической панели, нагруженной внешним интенсивным равномерно распределенным давлением. Пусть закрепление прямоугольной сферической панели допускает безмоментное напряженное состояние и в момент приложения нагрузки большой интенсивности панель обжимается безынерционно. Тогда уравнение, описывающее развитие нормальных прогибов, имеет вид [2,6]

$$\varepsilon^2 \Delta \Delta w + w + \lambda \Delta w + w_{,tt} = f(x, y) \quad (0 \leq x \leq a/R, \quad 0 \leq y \leq b/R, \quad t \geq 0) \quad (3.1)$$

Здесь x, y — пространственные координаты, R — радиус сферической оболочки, остальные обозначения совпадают с обозначениями п. 1 ($\Delta w = w_{,xx} + w_{,yy}$).

Допустим, что шарнирно опертая оболочка до нагружения находилась в покое

$$\begin{aligned} w = w_{,t} = 0, \quad (t = 0), \quad w = w_{,xx} = 0 \\ (x = 0, a/R), \quad w = w_{,yy} = 0 \quad (y = 0, b/R) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение задачи (3.1), (3.2) разыскивается в виде

$$w(x, y, t) = q(t) W(x, y) \quad (3.3)$$

причем функция $W(x, y)$ удовлетворяет уравнению (см. [6], гл. 10, § 15 и [2], § 212)

$$\Delta W = -\mu^2 W \quad (3.4)$$

Для $q(t)$ получается уравнение, по виду полностью совпадающее с уравнениями (2.4), а последнее уже было исследовано. При фиксированном μ уравнение (3.4) имеет неединственное решение

$$\left(\frac{n\pi R}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi R}{b}\right)^2 = \mu^2 \left(W(x, y) = \sin \frac{n\pi R x}{a} \sin \frac{m\pi R y}{b} \right) \quad (3.5)$$

или при целых n и m или при таких n и m , которые мало отличаются от целочисленных значений. В первом случае коэффициенты в экспонентах соответствующих движений совпадают, а во втором случае мало отличаются. Таким образом, плотность собственных движений в задаче о выпучивании сферической панели зависит от тонкостенности конструкции и связана с неединственностью решения уравнения (3.5).

При интенсивном нагружении оболочек [2] наибольшую скорость роста амплитуд имеют высшие формы потери устойчивости; это формально было

подтверждено в работе [4], но не было доказано, что всего одной форме соответствует экспонента с максимальным показателем. Построенный пример показывает, что неединственность может иметь место. Следовательно, исходную систему не всегда можно успешно аппроксимировать системой с одной степенью свободы. Поэтому желательно дополнительно исследовать плотность собственных движений в задачах об интенсивном нагружении произвольных однородных и слоистых оболочек. Аналогичные задачи о плотности собственных значений в задачах динамики [8] и устойчивости [9] однородных оболочек исследовались ранее. При интенсивном динамическом нагружении оболочек в соответствующих уравнениях имеются и инерционные члены и члены, связанные с устойчивостью.

Итак, основная часть решения задачи (3.1), (3.2), если провести анализ, подобный анализу п. 1, представима в виде

$$w = \sum_{n,m} q_{nm}(t) \sin \frac{n\pi Rx}{a} \sin \frac{m\pi Ry}{b}, \quad m = m(j_0, \varepsilon), \quad n = n(j_0, \varepsilon) \quad (3.6)$$

причем число степеней свободы достаточно велико. При изучении поведения слоистых конструкций с учетом поперечного сдвига это число степеней свободы резко возрастает.

4. Выше были выделены основные степени свободы в системах с распределенными параметрами (см. (1.13), (2.6) и (3.6)). Если для стержня число степеней свободы либо мало, либо равно единице, то для оболочек оно достаточно велико. В экспериментах [10,11] на сферических оболочках «установлено, что с ростом скорости нагружения число выпучин у оболочек увеличивается, т. е. обнаруживаются более высокие формы потери устойчивости» ([10], стр. 132,) а «при более высоких скоростях нагружения наблюдается тенденция к образованию нескольких рядов волн, расположенных в шахматном порядке концентрически относительно полюса» ([11], стр. 39). Но в этих экспериментах не наблюдалась достаточно устойчивая картина образования выпучин. Некоторая «неустойчивость», а точнее чувствительность к условиям эксперимента, связана с тем, что множество форм потери устойчивости имеют тенденцию к быстрому росту. Возможны «биения» нормального прогиба: «потере устойчивости всегда предшествовало значительное или быстро затухающее колебание всей оболочки или ее части («всплеск»)», обычно «первоначально появлялась у контура одна выпучина, при повторном нагружении эта выпучина получала дальнейшее развитие, и появлялась вторая» ([10], стр. 126, 127).

Используем зависимости (1.13), (2.6) и (3.6) для получения оценок критического времени выпучивания t_* и критической интенсивности нагружения η_* . Прежде отметим особенности упомянутых зависимостей: каждый член ряда состоит из сомножителей, в первом из которых при достаточно большом значении t основной вклад дает экспонента, а второй по модулю не превышает единицы. Поэтому, если предположить, что начальные возмущения, соответствующие различным формам нормальных движений, имеют один порядок малости [1] (т. е. попадают в один класс соотношения (1.11)), для нормального прогиба оболочки или стержня справедлива оценка

$$\max |w| \approx KC \exp \alpha^* t \quad (\alpha^* = \max \alpha) \quad (4.1)$$

Здесь K — число степеней свободы, C — постоянная, зависящая от условий задачи. Оценка (4.1) имеет место только для достаточно больших значений t , так как не содержит членов с $\exp(-\alpha^* t)$ и членов, не зависящих ни от x , ни от t .

Критическое время при выпучивании t_* и критическая интенсивность нагружения η_* определяются из соотношения

$$\max |w(\eta, t_*)| = w_*, \max |w(\eta_*, t_0)| = w_* \quad (4.2)$$

если за определяющую величину выбрать максимум прогиба.

В равенства (4.2) подставляется оценка (4.1) для прогиба w , имеем

$$\alpha^*(\eta) t \approx \ln w_* - \ln C - \ln K \quad (4.3)$$

откуда очевиден путь получения оценок для критических параметров t_* и η_* . Формула (4.3) достаточно устойчива по отношению к возможным ошибкам (возмущениям) в определении постоянных w_* , C и K . Слагаемое $(-\ln K)$, как правило, имеет значение в задачах о выпучивании вполне определенных тонкостенных оболочек, поскольку возможны ситуации, когда $K \gg 1$ (см. примеры, построенные п. 2,3; в задачах о выпучивании стержней, как правило, этим слагаемым можно пренебречь, поскольку $K = O(1)$).

Поступила 19 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. Докл. АН СССР, 1949, т. 64, № 6.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
3. Корнев В. М. О формах потери устойчивости упругого стержня при ударе. ПМТФ, 1968, № 3.
4. Корнев В. М. О формах потери устойчивости упругих оболочек при интенсивном нагружении. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 2.
5. Friedrichs K. O. Asymptotic phenomena in mathematical physics. Bull. Amer. Math. Soc., 1955, vol. 61, pp. 485—504.
6. Власов В. З. Избранные труды, т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1962.
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
8. Болотин В. В. О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
9. Бендиш Н. Н., Корнев В. М. О плотности собственных значений в задачах устойчивости тонких упругих оболочек. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
10. Суркин Р. Г., Зуев Б. М., Степанов С. Г. Экспериментальное исследование динамической устойчивости сферических сегментов. Прикл. механ., 1967, т. 3, вып. 8.
11. Бивин Ю. К. Исследование поведения цилиндрических и сферических оболочек при кратковременных нагрузках. В кн.: «Переходные процессы деформации оболочек и пластин», Таллин, 1967.