ЛИТЕРАТУРА

1. **Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.** Об устойчивости неоднородно стареющих вязкоупругих стержней.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 4.
2. **Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б.** Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983.
3. **Работнов Ю. Н.** Некоторые вопросы теории ползучести.— Вестн. МГУ, 1948, № 10.
4. **Бугаков И. И., Чеповецкий М. А.** Сравнительное исследование нелинейных уравнений вязкоупругости.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1984, т. 37, № 1.
5. **Drescher A., Michalski B.** Reologiczne, mechaniczne i optyczne wlasnosci polimetakrytanu metylu warunkach ztozonej historii obciązenia.—Mech. teor. i stosow., 1971, v. 9, N 2.
6. **Ржаницын А. Р.** Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955.
7. **Арутюнян Н. Х.** Некоторые вопросы теории ползучести. М.: Гостехиздат, 1952.
8. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.

Поступила 24/V 1984 г.

УДК 539.3

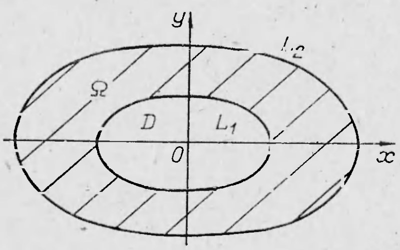
ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ФОРМАХ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ПРОДОЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ

Н. В. БАНИЧУК, Л. М. КУРШИН, Г. И. РАСТОРГУЕВ

(Москва, Новосибирск)

Определению оптимальных форм поперечных сечений изотропных призматических стержней посвящен ряд работ. В [1] сформулирована и в [2] доказана теорема: при заданной площади сечения максимальную жесткость кручения имеет стержень кругового сечения. Этот результат обобщен [3] на случай стержней с полостью: при известных значениях площади сечения и площади, охватываемой внутренним граничным контуром, наибольшую жесткость кручения имеет стержень с поперечным сечением в виде кругового кольца.

В [4, 5] получено условие оптимальности для задачи об определении формы поперечного сечения стержня из условия максимума крутильной жесткости при заданной площади сечения. Это позволило решить задачи о разыскании формы сечения стержня с полостью, имеющего наибольшую жесткость кручения при условии, что наряду с площадью сечения задан один из граничных контуров, отличный от окружности [4—7].



В [8, 9] найдены решения задач оптимизации одного из параметров призматического стержня: площади сечения, крутильной и изгибной жесткостей при ограничениях на два других. Задача об определении формы сечения стержня из условия максимума крутильной жесткости при заданных изгибных жесткостях исследовалась в [10, 11]. Показано, что оптимальными сечениями стержней в этих задачах являются круговые или эллиптические.

В данной работе обобщаются результаты [8, 10, 11] на случай стержней с двусвязным поперечным сечением.

1. Рассмотрим задачу об определении формы поперечного сечения изотропного призматического стержня, занимающего двусвязную область Ω (см. фигуру), из условия максимума крутильной жесткости при заданных осевых моментах инерции сечения (изгибных жесткостях)

$$\iint_{\Omega} y^2 dxdy = J_x, \quad \iint_{\Omega} x^2 dxdy = J_y \tag{1.1}$$

и фиксированной полощади F области D, охватываемой внутренним граничным контуром L_1:

$$\iint_{D} dxdy = F. \tag{1.2}$$

Введем функцию напряжений при кручении $\varphi(x, y)$ [12], удовлетворяющую уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + 2 = 0 \qquad (x, y) \in \Omega \tag{1.3}$$

и краевым условиям

$$\varphi = C(x, y) \in L_1, \ \varphi = 0 \qquad (x, y) \in L_2, \tag{1.4}$$

где постоянная C определяется из условия Бредта

(1.5) $$2F = -\oint\limits_{L_1} \varphi_n ds.$$

Через φ_n обозначена производная $\varphi(x, y)$ по нормали к контуру.

В соответствии с [4, 5] сформулированная задача оптимизации может быть поставлена как вариационная задача о стационарном значении функционала

(1.6) $$V = \iint\limits_{\Omega} \left(4\varphi - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 x^2\right) dxdy - \lambda_3 \iint\limits_{D} dxdy$$

в областях Ω, D с соответствующими подвижными границами $L_1 + L_2$, L_1 при краевых условиях (1.4).

Здесь λ_1, λ_2, λ_3 — подлежащие определению постоянные множители Лагранжа.

Условию стационарности функционала (1.6) с учетом (1.4) соответствуют уравнение (1.3) и вследствие варьирования L_1, L_2 условия оптимальности, определяющие форму граничных контуров:

(1.7) $$\varphi_n^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 + 4C = 0 \quad (x, y) \in L_1,$$
$$\varphi_n^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 x^2 = 0 \quad (x, y) \in L_2.$$

Условия (1.7) выполняются для сечения стержня, ограниченного двумя геометрически подобными эллипсами. Действительно, функция напряжений при кручении $\varphi(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (1.3), для такого сечения имеет вид [13]

(1.8) $$\varphi = -rx^2 + (r-1)y^2 + t \quad (x, y) \in L_1 + \Omega + L_2,$$

где $0 < r < 1$, $t > C > 0$ — постоянные, и будет удовлетворять краевым условиям (1.4) для сечения с границей, заданной уравнениями

(1.9) $$y^2 = [-rx^2 + (t - C)]/(1 - r) \quad (x, y) \in L_1,$$
$$y^2 = (-rx^2 + t)/(1 - r) \quad (x, y) \in L_2,$$

определяющими геометрически подобные эллипсы. Постоянная C, получаемая из (1.5), имеет вид

(1.10) $$C = t - F[r(1 - r)]^{1/2}/\pi.$$

В этом случае

$$\varphi_n^2 = 4\left[r(2r - 1)x^2 + (t - C)(1 - r)\right] \quad (x, y) \in L_1,$$
$$\varphi_n^2 = 4\left[r(2r - 1)x^2 + t(1 - r)\right] \quad (x, y) \in L_2$$

и условия (1.7) выполняются за счет однозначного выбора постоянных

$$\lambda_1 = -4(1 - r)^2, \; \lambda_2 = -4r^2, \; \lambda_3 = -4C.$$

Параметры r, t в решении (1.8) — (1.10) определяются известными величинами (1.1), (1.2):

(1.11) $$r = \beta/(1 + \beta), \; t = R\beta^{1/2}/(1 + \beta),$$
$$\beta = J_x/J_y, \; R = [4\pi(J_x J_y)^{1/2} + F^2]^{1/2}/\pi.$$

Жесткость кручения стержня (с точностью до множителя G — модуля сдвига материала)

$$K = 2\left(\iint\limits_{\Omega} \varphi dxdy + CF\right)$$

для оптимального сечения не зависит от задаваемой площади отверстия F:

$$K_{\text{opt}} = 4J_x J_y/(J_x + J_y).$$

Из (1.9), (1.11) находим полуоси внешнего эллипса a, b вдоль осей Ox, Oy:

(1.12) $$a = R^{1/2}\beta^{-1/4}, \; b = R^{1/2}\beta^{1/4}.$$

Соответствующие полуоси внутреннего контура сечения, геометрически подобного внешнему, равны αa, αb, где $0 \leqslant \alpha < 1$ — параметр, равный

(1.13) $$\alpha = [F/(R\pi)]^{1/2}.$$

Согласно (1.12), соотношение полуосей граничных контуров сечения-эллипсов $a/b = \beta^{-1/2}$ зависит только от соотношения требуемых изгибных жесткостей.

Полагая в полученном решении $F = 0$, т. е. продольная полость в стержне отсутствует, приходим к случаю односвязного сечения: максимуму крутильной жесткости при заданных изгибных жесткостях соответствует стержень с поперечным сечением, ограниченным эллипсом. Этот результат находится в соответствии с теоремой, доказанной в [10].

Рассмотрим задачу об определении формы сечения стержня с полостью из условия максимума одного из осевых моментов инерции, например J_x, при известных величинах другого момента J_y, жесткости кручения K и площади F сечения полости (1.2).

Эта задача является родственной по отношению к ранее рассмотренной. Условия оптимальности, определяющие формы граничных контуров сечения, отличаются от (1.7) лишь соответствующей перестановкой множителя Лагранжа λ_1, и решению задачи удовлетворяют функции (1.8) — (1.10), причем параметры r, t выражаются через заданные величины J_y, K, F следующим образом:

$$r = 1/(1+\gamma^2),\ t = \gamma Q^{1/2}/[\pi(1+\gamma)], \tag{1.14}$$
$$\gamma = [(4J_y - K)/K]^{1/2},\ Q = 4\pi J_y/\gamma + F^2.$$

Из (1.14) получаем, что для существования решения необходимо, чтобы задаваемые величины J_y, K удовлетворяли неравенству

$$K < 4J_y. \tag{1.15}$$

Для стержней с односвязным сечением, а значит, и для стержней с сечением, ограниченным двумя геометрически подобными эллипсами, существует оценка [12]: если $J_y < J_x$, то $K < 4J_y$. Следовательно, условие (1.15) не является дополнительным ограничением для существования решения, а лишь требует реального соотношения между задаваемыми величинами K, J_y.

Таким образом, формой сечения стержня с полостью, имеющего наибольшую изгибную жесткость при заданных значениях другой изгибной жесткости, крутильной жесткости, удовлетворяющих неравенству (1.15), и площади сечения полости, является сечение, ограниченное двумя геометрически подобными эллипсами.

Полуоси внешнего граничного эллипса a, b, соотношение размеров внутреннего и внешнего геометрически подобных контуров α и значение оптимизируемого момента J_x имеют вид

$$a = Q^{1/4}(\gamma/\pi)^{1/2},\ a/b = \gamma,\ \alpha = F^{1/2}/Q^{1/4},\ J_{x\,\mathrm{opt}} = J_y/\gamma^2.$$

Полагая $F = 0$, приходим к случаю сплошного стержня: максимальную изгибную жесткость при фиксированных значениях другой изгибной жесткости и жесткости кручения, удовлетворяющих условию (1.15), имеет стержень с эллиптическим поперечным сечением.

2. Рассмотрим задачу об определении формы поперечного сечения призматического стержня с полостью, имеющего минимальную площадь сечения

$$S = \iint_\Omega dxdy \tag{2.1}$$

при заданных величинах осевых моментов инерции (1.1) и площади сечения полости (1.2).

Условия оптимальности имеют вид

$$1 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 = 0 \qquad (x, y) \in L_1,$$
$$1 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 x^2 = 0 \qquad (x, y) \in L_2,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — подлежащие определению постоянные, и решению задачи удовлетворяет сечение стержня, ограниченное двумя геометрически подобными эллипсами. Параметры сечения определяются величинами J_x, J_y, F по формулам (1.12), (1.13).

Площадь сечения оптимального стержня

$$S_{\mathrm{opt}} = [4\pi(J_x J_y)^{1/2} + F^2]^{1/2} - F$$

при неизменных J_x, J_y с возрастанием задаваемой величины площади отверстия F уменьшается.

Отметим, что полученные оптимальные стержни соответствуют не только минимуму площади сечения, но одновременно и максимуму крутильной жесткости стержня при тех же ограничениях (1.1), (1.2).

Решением родственной задачи оптимизации — задачи об определении формы сечения стержня из условия максимума одного из осевых моментов инерции, например J_x, при заданных величинах S, J_y, F — также является сечение, ограниченное двумя геометрически подобными эллипсами:

$$\gamma = \frac{a}{b} = \frac{4\pi J_y}{S(S+2F)},\ b = \frac{[S(S+F)(S+2F)]^{1/2}}{2\pi J_y^{1/2}},$$
$$\alpha^2 = F/(F+S),\ J_{x\,\mathrm{opt}} = J_y/\gamma^2.$$

Полагая в этих задачах $F = 0$, приходим к случаю сплошных стержней, и оптимальными сечениями будут эллиптические.

3. Исследуем задачу об определении формы поперечного сечения стержня, имеющего продольную полость, из условия минимума площади сечения S (2.1) при ограничениях на крутильную жесткость K, на один из осевых моментов инерции (изгибную жесткость), например J_x:

$$K = 2\left(\iint_{\Omega} \varphi dxdy + CF\right) \geqslant K_0, \quad J_x = \iint_{\Omega} y^2 dxdy \geqslant J_0 \tag{3.1}$$

и при фиксированной площади F, охватываемой внутренним контуром L_1 сечения (см. фигуру).

Следуя [8], рассмотрим сначала задачу минимизации S при одном только ограничении на крутильную жесткость. Тогда минимальную площадь сечения при заданных величинах крутильной жесткости $K = K_0$ и площади F отверстия будет иметь стержень с сечением в виде кругового кольца. Радиусы кольца

$$R_1 = (F/\pi)^{1/2}, \quad R_2 = [2K_0/\pi + (F/\pi)^2]^{1/4}. \tag{3.2}$$

Величины K, J_x для такого стержня связаны соотношением $K = 2J_x$.

Если константы K_0, J_0 в ограничениях (3.1) удовлетворяют неравенству

$$K_0 \geqslant 2J_0, \tag{3.3}$$

то оптимальным в задаче минимизации S при ограничениях (3.1) и заданной величине F по-прежнему является стержень с сечением в виде кругового кольца, так как в этом случае $K = K_0$, $J_x \geqslant J_0$. Радиусы кольца определяются параметрами K_0, F по формулам (3.2).

Если заданные параметры K_0, J_0 нарушают условие (3.3) ($K_0 < 2J_0$), то оба ограничения (3.1) оказываются существенными при отыскании оптимальной формы сечения. Заменяя ограничения (3.1) на строгие равенства, сводим задачу оптимизации к вариационной задаче о стационарном значении функционала

$$V = \iint_{\Omega} \left[1 + \lambda_1\left(4\varphi - \varphi_x^2 - \varphi_y^2\right) + \lambda_2 y^2\right] dxdy - \lambda_3 \iint_{D} dxdy.$$

Условия оптимальности, получаемые за счет варьирования границ областей Ω, D, имеют вид

$$\begin{aligned} &1 + \lambda_1\varphi_n^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 + 4C\lambda_1 = 0 \qquad (x, y) \in L_1, \\ &1 + \lambda_1\varphi_n^2 + \lambda_2 y^2 = 0 \qquad (x, y) \in L_2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Условия (3.4) выполняются для сечения стержня, ограниченного двумя геометрически подобными эллипсами. Решение задачи определяется функциями (1.8) — (1.10), где параметры r, t зависят от величин K_0, J_0, F:

$$r = \frac{1}{1+\gamma^2}, \quad t = \frac{\gamma\,(4\pi\gamma J_0 + F^2)^{1/2}}{\pi(1+\gamma^2)}, \quad \gamma = \left(\frac{K_0}{4J_0 - K_0}\right)^{1/2}.$$

Полуоси внешнего граничного эллипса a, b, соотношение размеров α внутреннего и внешнего геометрически подобных контуров и значение оптимальной площади сечения S имеют вид

$$\frac{a}{b} = \gamma, \quad b = \frac{\left(4\pi\gamma J_0 + F^2\right)^{1/4}}{(\pi\gamma)^{1/2}},$$

$$\alpha = \frac{1}{b}\left(\frac{F}{\pi\gamma}\right)^{1/2}, \quad S_{\mathrm{opt}} = \left(4\pi\gamma J_0 + F^2\right)^{1/2} - F.$$

С рассмотренной задачей связаны две родственные задачи оптимизации. Первая заключается в максимизации крутильной жесткости K стержня, имеющего двусвязное поперечное сечение, при ограничениях на площадь (2.1) и один из осевых моментов инерции сечения

$$S \leqslant S_0, \quad J_x \geqslant J_0. \tag{3.5}$$

Во второй задаче требуется максимизировать изгибную жесткость (осевой момент инерции J_x) при заданных ограничениях на площадь поперечного сечения и крутильную жесткость

$$S \leqslant S_0, \quad K \geqslant K_0. \tag{3.6}$$

Предполагается также, что в этих задачах известна площадь F, охватываемая внутренним граничным контуром сечения.

Обратимся к первой задаче. Если не учитывать ограничения $J_x \geqslant J_0$ в (3.5), то при заданных площадях сечения S и отверстия F максимуму крутильной жесткости K соответствует сечение стержня в виде кругового кольца [3]. Величины S, J_x для такого кольца связаны соотношением

$$J_x = \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)\,4\pi} S^2, \quad \alpha^2 = \frac{F}{S+F}.$$

Если заданные величины S_0, J_0 удовлетворяют неравенству

$$J_0 \leqslant \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)\,4\pi} S_0^2, \tag{3.7}$$

то оптимальным также будет сечение в виде кругового кольца (при этом $S = S_0$, $J_x \geqslant J_0$). Радиусы граничных окружностей $R_1 = (F/\pi)^{1/2}$, $R_2 = [(S_0 + F)/\pi]^{1/2}$.

Если параметры S_0, J_0 не удовлетворяют соотношению (3.7), то при определении оптимальной формы сечения необходимо учитывать ограничение и на изгибную жесткость. Можно показать, что решению задачи в этом случае удовлетворяет сечение стержня, ограниченное двумя геометрически подобными эллипсами, причем в (3.5) принимаются строгие равенства. Параметры граничных эллипсов a, b, α и крутильная жесткость оптимального стержня определяются величинами J_0, S_0, F:

$$\gamma = \frac{a}{b} = \frac{S_0(S_0+2F)}{4\pi J_0}, \quad b = 2\left[\frac{J_0(F+S_0)}{S_0(S_0+2F)}\right]^{1/2},$$

$$\alpha^2 = \frac{F}{S_0+F}, \quad K_{\text{opt}} = 4J_0\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2}.$$

Рассмотрим вторую задачу. При определении оптимальной формы сечения в задаче максимизации изгибной жесткости учитываются оба ограничения (3.6). Заменяя в (3.6) неравенства на строгие равенства, находим, что решению задачи также удовлетворяет стержень с поперечным сечением, ограниченным двумя геометрически подобными эллипсами:

$$\gamma = \frac{a}{b} = \frac{\delta}{2\pi}\left[1-(\delta^2-4\pi^2)^{1/2}\right], \quad \delta = \frac{S_0(S_0+2F)}{K_0}, \tag{3.8}$$

$$b = \left(\frac{S_0+F}{\pi\gamma}\right)^{1/2}, \quad \alpha^2 = \frac{F}{S_0+F}, \quad J_{x\text{opt}} = \frac{S_0(S_0+2F)}{4\pi\gamma}.$$

Из (3.8) получаем, что задача имеет решение при следующем ограничении на задаваемые параметры K_0, S_0, F:

$$K_0 \leqslant [S_0(S_0 + 2F)]/2\pi. \tag{3.9}$$

Ограничение (3.9) имеет физический смысл: задаваемая крутильная жесткость K_0 не должна превышать крутильной жесткости стержня с поперечным сечением в виде кругового кольца, имеющим площадь S_0 и площадь отверстия F.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сен-Венан Б.** Мемуар о кручении призм.— В кн.: Мемуар об изгибе призм. М.: Физматгиз, 1961.
2. **Polya G.** Torsional rigidity, principal frequency, electrostatic capacity and symmetrization.— Quart. Appl. Math., 1948, v. 6, N 3.
3. **Polya G., Weinstein A.** On the torsion rigidity of multiply connected cross-sections.— Ann. Math., 1950, v. 2, N 52.
4. **Баничук Н. В.** Об одной вариационной задаче с неизвестной границей и определении оптимальных форм упругих тел.— ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
5. **Куршин Л. М.** К задаче об определении формы сечения стержня максимальной крутильной жесткости.— ДАН СССР, 1975, т. 223, № 3.
6. **Баничук Н. В.** Об одной двумерной задаче оптимизации в теории кручения упругих стержней. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.
7. **Куршин Л. М., Оноприенко П. Н.** Определение форм двусвязных сечений стержней максимальной крутильной жесткости.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 6.
8. **Banichuk N. V., Karihaloo B. L.** Minimum-weight design of multipurpose cylindrical bars.— Int. J. Solids and Structures, 1976, v. 12, N 4.
9. **Баничук Н. В.** Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.
10. **Николаи Е. Л.** Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955.
11. **Куршин Л. М., Расторгуев Г. И.** Об оптимальной форме сечения скручиваемого стержня.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, № 6.
12. **Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.** Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963.
13. **Тимошенко С. П., Гудьер Дж.** Теория упругости. М.: Наука, 1975.

Поступила 23/V 1984 г.