ОБ ОДНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СИЛЬНЫХ ВЗРЫВНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Б. Н. Румянцев (*Москва*)

Рассматривается задача о цилиндрическом взрыве в неоднородной атмосфере при γ, близком к единице. Выводится система уравнений, описывающих движение газа. Находится ее приближенное решение для случая взрыва на границе двух сред с постоянными и мало отличающимися одна от другой плотностями.

1. Теория одномерных неустановившихся течений газа при отношении теплоемкостей $\gamma = c_p / c_v$, близком к единице, описывается в монографиях [1,2]. При произвольных γ многими авторами рассматривалась также задача о неустановившихся течениях в неоднородной среде, но почти всегда исследование ограничивалось изучением линейного приближения (малыми считались неоднородности плотности). Обзор работ, относящихся к этому вопросу, имеется в статье [3] и в монографии [4]. В работе [5] предлагается приближенный метод решения нелинейной задачи. Ниже приближенное решение задачи о взрыве в неоднородной среде строится при предположении, что γ в этой среде близко к единице.

Будем рассматривать случай цилиндрического взрыва. Ввиду симметрии течение во всех плоскостях, перпендикулярных к линии взрыва, одинаково. На фиг. 1 изображается одна из таких плоскостей, которая пересекает линию взрыва в точке O. Известно, что при взрыве в однородной среде при $\gamma \to 1$ давление внутри полости, занятой возмущенным газом, становится равномерным, а вся масса газа сосредоточивается вблизи фронта волны. При этом в непосредственной близости фронта давление повышается, но доля энергии газа, связанная с этим повышенным давлением, стремится к нулю. Будем считать, что эти свойства течения сохраняются и при взрыве в неоднородной среде.

Пусть E — энергия взрыва, приходящаяся на единицу длины заряда, тогда при $\gamma \to 1$ для давления p справедлива следующая формула:

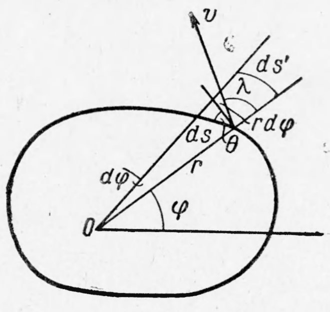
$$p = (\gamma - 1)\frac{E}{V} \qquad (1.1)$$

где $V = V(t)$ — объем возмущенного газа. Введем полярные координаты (фиг. 1). Рассмотрим движение элемента поверхности ds, заключенного внутри угла $d\varphi$. Изменение в нем массы за время от t до $t + dt$ равно

$$\rho' ds' - \rho ds$$

где ρ — поверхностная плотность (масса газа, находящегося на фронте волны, приходящаяся на единицу угла φ). Приравнивая это изменение сумме масс, захваченной элементом ds в его радиальном движении и перетекшей через стенки сектора, получаем уравнение сохранения массы

$$\rho' ds' - \rho ds = \rho_1 r \frac{\partial r}{\partial t} d\varphi dt - \frac{\partial \rho v_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi dt \qquad (1.2)$$



Фиг. 1

где $\rho_1(\varphi, r)$ — плотность покоящегося газа, v_φ — составляющая скорости газа, перпендикулярная к радиусу. Приравнивая изменение количеств движения в элементе ds импульсу сил давления, получаем уравнение количеств движения в проекциях на радиус и перпендикуляр к радиусу

$$\rho' v_r' ds' - \rho v_r ds = p \cos\theta ds dt - \frac{\partial \rho v_\varphi v_r}{\partial \varphi} d\varphi dt \qquad (1.3)$$

$$\rho' v_\varphi' ds' - \rho v_\varphi ds = p \sin\theta ds dt - \frac{\partial \rho v_\varphi^2}{\partial \varphi} d\varphi dt \qquad (1.4)$$

В качестве последних трех уравнений возьмем следующие соотношения, справедливость которых вытекает из рассмотрения фиг. 1:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = v_r(1 + \operatorname{tg}\lambda \operatorname{tg}\theta), \qquad \frac{\partial r}{\partial \varphi} = -r \operatorname{tg}\theta, \qquad V(t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi \qquad (1.5)$$

Выразим ds' через dr и $d\varphi$

$$ds' = ds\left(1 + \frac{dr}{r}\right) = r \sec\theta \left(1 + \frac{dr}{r}\right) d\varphi$$

Поделив правые и левые части (1.2) — (1.4) на $d\varphi dt$ и вычитая из двух последних получившихся уравнений первое, умноженное на v_r и на v_φ, находим следующие уравнения:

$$\left(\rho \frac{\partial r}{\partial t} + r \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) \sec \theta = \rho_1 r \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{\partial \rho v_\varphi}{\partial \varphi} \tag{1.6}$$

$$\rho r \frac{\partial v_r}{\partial t} \sec \theta = pr - \rho_1 r v_r \frac{\partial r}{\partial t} - \rho v_\varphi \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}, \quad \rho r \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} \sec \theta = pr \operatorname{tg} \theta - \rho_1 r v_\varphi \frac{\partial r}{\partial t} - \rho v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

Таким образом, чтобы определить течение газа, требуется найти решение интегродифференциальной системы уравнений (1.1), (1.5) и (1.6). В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\rho_1 = \rho_1(\varphi)$, при этом задача становится автомодельной.

Введем безразмерные координаты по следующим формулам:

$$r = R^\circ \left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/4} t^{1/2}, \quad v_r = U_r^\circ \left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/4} t^{-1/2}, \quad v_\varphi = U_\varphi^\circ \left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/4} t^{-1/2}, \quad \rho = \rho_0 Q^\circ \left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/4} t^{1/2}$$

$$\rho_1 = \rho_0 Q_1^\circ \tag{1.7}$$

Умножив и разделив $V(t)$ на V_*, получим соотношение

$$V(t) = \pi R_*^{\circ 2} \frac{V}{V_*} \left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/2} t$$

где R_* и V_* — соответствующие величины при взрыве в среде с равномерной плотностью ρ_0. Подставляя (1.7) в систему (1.1), (1.5) и (1.6) и решая ее в случае равномерной плотности, получим

$$R_*^{\circ 4} = 8 \frac{\gamma - 1}{\pi Q_{1_*}^\circ}$$

Вводим обозначения

$$R = \frac{R^\circ}{R_*^\circ}, \quad Q = \frac{Q^\circ}{Q_{1*}^\circ R_*^\circ}, \quad Q_1 = \frac{Q_1^\circ}{Q_{1*}^\circ}, \quad U_r = \frac{U_r^\circ}{R_*^\circ}, \quad U_\varphi = \frac{U_\varphi^\circ}{R_*^\circ} \tag{1.8}$$

При этом система уравнений (1.1), (1.5) и (1.6) примет вид

$$\frac{dQU_\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{2} Q_1 R^2 - QR \sec \theta, \qquad \frac{dU_r}{d\varphi} = \frac{1}{2QU_\varphi}\left(\frac{RG}{4} - Q_1 R^2 U_r + QRU_r \sec \theta\right)$$

$$\frac{dU_\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{2QU_\varphi}\left(\frac{RG}{4} \operatorname{tg} \theta - Q_1 R^2 U_\varphi + QRU_\varphi \sec \theta\right), \qquad \frac{dR}{d\varphi} = -R \operatorname{tg} \theta \tag{1.9}$$

$$R = 2U_r \left(1 + \frac{U_\varphi}{U_r} \operatorname{tg} \theta\right), \quad \frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi, \qquad G = \frac{V_*}{V}$$

2. Будем считать, что среда имеет почти равномерную плотность $Q_1 = Q_1^{(0)} + \varepsilon Q_1^{(1)}$, где $Q_1^{(0)}$ — постоянная, $Q_1^{(1)}(\varphi)$ — известная функция, ε — постоянный малый параметр. Разложим параметры течения в ряд по степеням ε

$$\begin{aligned} &R = R^{(0)} + \varepsilon R^{(1)} + \varepsilon^2 R^{(2)} + \ldots, && Q = Q^{(0)} + \varepsilon Q^{(1)} + \varepsilon^2 Q^{(2)} + \ldots \\ &U_r = U_r^{(0)} + \varepsilon U_r^{(1)} + \varepsilon^2 U_r^{(2)} + \ldots, && \theta = \varepsilon \theta^{(1)} + \varepsilon^2 \theta^{(2)} + \ldots \\ &U_\varphi = \varepsilon U_\varphi^{(1)} + \varepsilon^2 U_\varphi^{(2)} + \ldots, && G = g^{(0)} + \varepsilon g^{(1)} + \varepsilon^2 g^{(2)} + \ldots \end{aligned} \tag{2.1}$$

Подставив (2.1) в систему (1.9), получаем для членов при нулевой степени ε

$$Q_1^{(0)} = 1, \qquad R^{(0)} = 1, \qquad U_r^{(0)} = \frac{1}{2}, \qquad Q^{(0)} = \frac{1}{2}, \qquad g^{(0)} = 1 \tag{2.2}$$

Для членов при первой степени ε находим

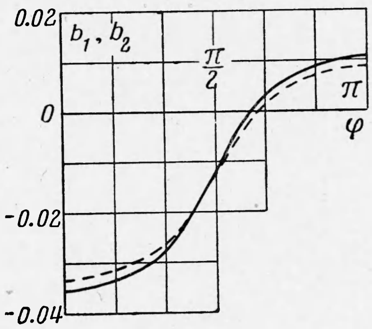
$$\begin{aligned} &U_r^{(1)} = \frac{R^{(1)}}{2}, \qquad \theta^{(1)} = 2U_\varphi^{(1)}, \qquad Q^{(1)} = \frac{3}{2} R^{(1)} + Q_1^{(1)} - \frac{1}{2} g^{(1)} \\ &\frac{dU_\varphi^{(1)}}{d\varphi} = g^{(1)} - 2R^{(1)} - Q_1^{(1)}, \qquad \frac{dR^{(1)}}{d\varphi} = -\theta^{(1)}, \qquad g^{(1)} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R^{(1)} d\varphi \end{aligned} \tag{2.3}$$

Исключая все неизвестные, кроме $R^{(1)}$, приводим систему (2.3) к такому виду:

$$\frac{d^2R^{(1)}}{d\varphi^2} - 4R^{(1)} = 2Q_1^{(1)} + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} R^{(1)} d\varphi \qquad (2.4)$$

Будем искать периодическое решение этого уравнения, представив $Q_1^{(1)}(\varphi)$ и $R^{(1)}(\varphi)$ в виде рядов Фурье. В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $Q_1^{(1)} = 1$ при $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ и $Q_1^{(1)}=0$ при $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$, т. е. взрыв на границе двух сред с постоянными плотностями. При этом имеет место разложение (2.5)

$$Q_1^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(2k-1)\varphi}{2k-1}$$



Фиг. 2

Представим $R^{(1)}(\varphi)$ в виде

$$R^{(1)}(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\varphi \qquad (2.6)$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.4) и приравнивая коэффициенты при $\cos k\varphi$, находим

$$R^{(1)}(\varphi) = -\frac{1}{8} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos(2k-1)\varphi}{(2k-1)[(2k-1)^2+4]}, \qquad g^{(1)} = \frac{1}{4} \qquad (2.7)$$

Для членов при второй степени ε получаем из системы (1.9)

$$\frac{d^2R^{(2)}}{d\varphi^2} - 4R^{(2)} = -\frac{1}{2} - 8U_\varphi^{\cdot\cdot(1)^2} - 26R^{(1)}(R^{(1)} + Q_1^{(1)}) - 8Q_1^{(1)^2} + 6.5R^{(1)} + 3.5Q_1^{(1)} +$$

$$+ 8U_\varphi^{(1)}\frac{dQ_1^{(1)}}{d\varphi} + 14U_\varphi^{(1)}\frac{dR^{(1)}}{d\varphi} + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} R^{(1)^2} d\varphi + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} R^{(2)} d\varphi \qquad (2.8)$$

Как и в предыдущем случае, разлагаем правые и левые части (2.8) в ряды Фурье, используя (2.3), (2.5) и (2.7) и приравнивая коэффициенты при косинусах одинаковых аргументов, получаем выражение для $R^{(2)}$

$$R^{(2)} = -0.045 + 0.53\cos\varphi + 0.17\cos 2\varphi - 0.052\cos 3\varphi - 0.066\cos 4\varphi + 0.014\cos 5\varphi + \ldots \qquad (2.9)$$

На фиг. 2 построены графики функций $b_1 = \varepsilon R^{(1)}$ (сплошная линия) и $b_2 = \varepsilon R^{(1)} + \varepsilon^2 R^{(2)}$ (штриховая линия) в зависимости от угла φ при $\varepsilon = 0.1$.

Следует отметить, что уже при вычислении второго приближения за счет члена, содержащего $dQ_1^{(1)}/d\varphi$, на границе раздела двух сред появляется разрыв производной $dR/d\varphi$, т. е. излом фронта ударной волны.

Вычислим отношение α энергии, перешедшей в менее плотную среду к энергии, перешедшей в более плотную среду. Интегрируя численно по формулам (2.7) и (2.9) и принимая во внимание, что энергия пропорциональна объему, получаем в первом приближении $\alpha_1 = 1.16$ и с учетом второго $\alpha_2 = 1.15$.

Автор благодарит Г. Г. Черного за советы и замечания.

Поступила 18 IX 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
2. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., ИЛ, 1962.
3. Андрианкин Э. И. Метод возмущений для задачи о сильном взрыве. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 12.
4. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. Физматгиз, 1961.
5. Компанеец А. С. Точечный взрыв в неоднородной атмосфере. ДАН СССР, 1960, т. 130, № 5.