УДК 532.516; 532.582

ПРИМЕР ДВИЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

О. С. Пятигорская, В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: sennitskii@yandex.ru

Рассмотрена задача о движении пульсирующего твердого тела — бесконечно длинного кругового цилиндра — в колеблющейся вязкой жидкости в присутствии (или в отсутствие) внешнего стационарного силового воздействия. Применен метод возмущений. Обнаружено, что решение задачи о среднем по времени движении тела существует тогда и только тогда, когда пульсации тела, колебания жидкости и внешнее силовое воздействие удовлетворяют определенному соотношению. Установлено наличие плоского аналога явления преимущественно однонаправленного движения сжимаемого твердого тела в колеблющейся жидкости.

Ключевые слова: твердое тело, вязкая жидкость, пульсации, колебания, внешнее силовое воздействие, преимущественно однонаправленное движение тела.

Теоретическим и экспериментальным исследованиям движения включений в колеблющейся (вибрирующей) жидкости посвящено большое число работ (см., например, [1–18]).

В [7] изложены экспериментальные результаты, свидетельствующие об обнаружении явления преимущественно однонаправленного движения сжимаемого твердого тела в колеблющейся жидкости. Это явление состоит в том, что сжимаемое твердое тело в жидкости, находящейся в замкнутом сосуде, вследствие заданных колебаний и деформаций сосуда перемещается в заданном направлении. В [14] проведено математическое моделирование, поставлена и решена задача о движении пульсирующего твердого шара в колеблющейся вязкой жидкости (достигнуто соответствие между теорией и экспериментом).

Настоящая работа посвящена изучению плоской модели — расширенного аналога пространственной модели, построенной в [14]; поставлена и решена задача о движении в колеблющейся вязкой жидкости пульсирующего твердого кругового цилиндра, подвергающегося внешнему (по отношению к гидромеханической системе) стационарному силовому воздействию. Обнаружено, в частности, что в плоской модели имеют место “разрешенные” и “запрещенные” пульсации тела, колебания жидкости и внешнее силовое воздействие, для которых нетривиальное приближенное решение задачи о среднем по времени движении тела соответственно существует и не существует.

1. В вязкой несжимаемой не ограниченной извне жидкости находится сжимаемое твердое тело — бесконечно длинный круговой цилиндр. Скорость жидкости на бесконечности относительно инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z и радиус цилиндра периодически с периодом T изменяются со временем t; среднее по времени значение скорости жидкости на бесконечности равно нулю. Ось цилиндра параллельна оси Z. Течение жидкости не зависит от начальных условий и является плоским. Распределение составляющей цилиндр среды симметрично относительно его оси. Каждая часть цилиндра длиной l (“вписанная” между двумя плоскостями течения жидкости) имеет массу m и подвергается действию внешней постоянной силы $\boldsymbol{F}_{\text{в}}$. Положение цилиндра характеризуется радиус-вектором $\boldsymbol{S}$ точки пересечения оси цилиндра с плоскостью $Z = 0$.

Требуется определить зависимость $\boldsymbol{S}$ от t.

2. Перейдем к прямоугольной системе координат $X_1 = X - S_X$, $X_2 = Y - S_Y$, $X_3 = Z$ (S_X, S_Y — соответственно X-, Y-компоненты вектора $\boldsymbol{S}$).

Пусть $\tau = t/T$; $A = A_0(1 + \varkappa a)$ — радиус цилиндра (A_0 ($A_0 > 0$) — постоянная; $\varkappa$ ($0 \leqslant \varkappa < 1$) — наибольшее значение $|A - A_0|/A_0$; $a = \operatorname{Real} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \,\mathrm{e}^{2n\pi i\tau}$ (a_n — постоянные)); $\boldsymbol{U} = \hat{U}\boldsymbol{u} = \hat{U}u\boldsymbol{e}_X$ — скорость жидкости на бесконечности относительно системы координат X, Y, Z ($\hat{U}$ — наибольшее значение $|\boldsymbol{U}|$; $u = \operatorname{Real} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \,\mathrm{e}^{2n\pi i\tau}$, u_n — постоянные; $\boldsymbol{e}_X = \{1, 0, 0\}$); $\varepsilon = \hat{U}T/A_0$; ρ — плотность жидкости; $\mu = m/(\pi A_0^2 l\rho)$; Ξ — линия пересечения поверхности цилиндра с плоскостью $X_3 = 0$; $\boldsymbol{V}$ — скорость жидкости; $\boldsymbol{v} = T\boldsymbol{V}/A_0$; P — давление в жидкости; $p = T^2P/(\rho A_0^2)$; $\boldsymbol{W} = d\boldsymbol{S}/dt$ — скорость цилиндра (оси цилиндра) относительно системы координат X, Y, Z; $\boldsymbol{w} = (1/A_0)\, d\boldsymbol{S}/d\tau$; ν — кинематическая вязкость жидкости; $\mathrm{Re} = A_0^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса; $\boldsymbol{R} = \{X_1, X_2, 0\}$; $R = |\boldsymbol{R}|$; $\mathcal{P}$ — тензор напряжений в жидкости; $\wp = T^2\mathcal{P}/(\rho A_0^2)$; $\boldsymbol{F}_{\text{ж}}$ — сила, действующая на часть цилиндра длиной l со стороны жидкости;

$$\boldsymbol{f}_{\text{ж}} = \frac{T^2\boldsymbol{F}_{\text{ж}}}{\rho A_0^3 l} = (1 + \varkappa a) \int\limits_0^{2\pi} (\wp \cdot \boldsymbol{e}_R)\big|_{r=1+\varkappa a}\, d\theta$$

($\boldsymbol{e}_R = \boldsymbol{R}/R$; $r = R/A_0$; θ — угол между векторами $\boldsymbol{e}_X$ и $\boldsymbol{e}_R$); $\boldsymbol{f}_{\text{в}} = T^2\boldsymbol{F}_{\text{в}}/(\rho A_0^3 l)$.

Уравнение движения цилиндра (оси цилиндра, центра инерции части цилиндра длиной l), уравнения Навье — Стокса и неразрывности и условия, которые должны выполняться на линии Ξ и на бесконечности, имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{f}_{\text{в}} + \boldsymbol{f}_{\text{ж}} - \pi\mu\,\frac{d\boldsymbol{w}}{d\tau} = 0,\\
\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\tau} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\boldsymbol{v} - \frac{d\boldsymbol{w}}{d\tau},\\
\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0,\\
\boldsymbol{v} = \varkappa\,\frac{da}{d\tau}\,\boldsymbol{e}_R \quad \text{на} \quad \Xi,\\
\boldsymbol{v} \sim \varepsilon\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} \quad \text{при} \quad r \to \infty.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

3. Дополним (2.1) соотношением

$$\boldsymbol{f}_{\text{в}} = \varepsilon\varkappa f_{\text{в}}\boldsymbol{e}_X, \tag{3.1}$$

где $f_{\text{в}}$ — величина, не зависящая от ε, $\varkappa$.

3.1. Будем рассматривать задачу (2.1), (3.1) при малых по сравнению с единицей значениях ε.

Предположим, что при $\varepsilon \to 0$

$$\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{v}^{(0)} + \varepsilon\boldsymbol{v}^{(1)}, \qquad p \sim p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)}, \qquad \boldsymbol{w} \sim \boldsymbol{w}^{(0)} + \varepsilon\boldsymbol{w}^{(1)}. \tag{3.2}$$

Используя (2.1), (3.1), (3.2), в M-м ($M = 0, 1$) приближении найдем

$$M\varkappa f_{\text{в}}\boldsymbol{e}_X + \boldsymbol{f}^{(M)} - \pi\mu\,\frac{d\boldsymbol{w}^{(M)}}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}^{(M)}}{\partial\tau} + (\boldsymbol{v}^{(0)}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}^{(M)} + M(\boldsymbol{v}^{(1)}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}^{(0)} + \nabla p^{(M)} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\boldsymbol{v}^{(M)} + \frac{d\boldsymbol{w}^{(M)}}{d\tau} = 0,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}^{(M)} = 0, \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{v}^{(M)} = (1-M)\varkappa\,\frac{da}{d\tau}\,\boldsymbol{e}_R \quad \text{при} \quad r = 1 + \varkappa a,$$

$$\boldsymbol{v}^{(M)} \sim M\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}^{(M)} \quad \text{при} \quad r\to\infty.$$

Здесь

$$\boldsymbol{f}^{(M)} = (1+\varkappa a)\int\limits_0^{2\pi}(\wp^{(M)}\cdot\boldsymbol{e}_R)\big|_{|r=1+\varkappa a}\,d\theta \tag{3.4}$$

($\wp^{(M)}$ есть $\wp$ при $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(M)}$, $p = p^{(M)}$).

Пусть $M = 0$.

При $\varepsilon = 0$ ось цилиндра неподвижна относительно системы координат X, Y, Z, течение жидкости в плоскости $X_3 = 0$ симметрично относительно начала координат X_1, X_2, X_3.

Задача (3.3) имеет решение

$$\boldsymbol{v}^{(0)} = \varkappa(1+\varkappa a)\,\frac{da/d\tau}{r}\,\boldsymbol{e}_R; \tag{3.5}$$

$$p^{(0)} = -\varkappa\Big(\frac{d\,[(1+\varkappa a)\,da/d\tau]}{d\tau}\,\ln r + \frac{\varkappa(1+\varkappa a)^2(da/d\tau)^2}{2r^2}\Big) + c^{(0)};$$

$$\boldsymbol{w}^{(0)} = 0, \tag{3.6}$$

где $c^{(0)}$ — функция τ.

Пусть $M = 1$.

Будем рассматривать задачу (3.3) при малых по сравнению с единицей значениях $\varkappa$ (значения ε малы по сравнению со значениями $\varkappa$).

Из (3.5) следует, что при $\varkappa\to 0$

$$\boldsymbol{v}^{(0)} \sim \varkappa\boldsymbol{v}^{(0)}_{(1)} = \varkappa\,\frac{da/d\tau}{r}\,\boldsymbol{e}_R. \tag{3.7}$$

Предположим, что при $\varkappa\to 0$

$$\boldsymbol{v}^{(1)} \sim \boldsymbol{v}^{(1)}_{(0)} + \varkappa\boldsymbol{v}^{(1)}_{(1)}, \quad p^{(1)} \sim p^{(1)}_{(0)} + \varkappa p^{(1)}_{(1)}, \quad \boldsymbol{w}^{(1)} \sim \boldsymbol{w}^{(1)}_{(0)} + \varkappa\boldsymbol{w}^{(1)}_{(1)}. \tag{3.8}$$

Используя (3.3), (3.4), (3.7), (3.8), в N-м ($N = 0, 1$) приближении найдем

$$Nf_{\text{в}}\boldsymbol{e}_X + \boldsymbol{f}^{(1)}_{(N)} - \pi\mu\,\frac{d\boldsymbol{w}^{(1)}_{(N)}}{d\tau} = 0; \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}^{(1)}_{(N)}}{\partial\tau} + \nabla p^{(1)}_{(N)} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\boldsymbol{v}^{(1)}_{(N)} + \frac{d\boldsymbol{w}^{(1)}_{(N)}}{d\tau} = -N[(\boldsymbol{v}^{(0)}_{(1)}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}^{(1)}_{(0)} + (\boldsymbol{v}^{(1)}_{(0)}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}^{(0)}_{(1)}],$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}^{(1)}_{(N)} = 0, \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{v}^{(1)}_{(N)} = -N\,\frac{\partial\boldsymbol{v}^{(1)}_{(0)}}{\partial r}\,a \quad \text{при} \quad r = 1,$$

$$\boldsymbol{v}^{(1)}_{(N)} \sim (1-N)\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}^{(1)}_{(N)} \quad \text{при} \quad r\to\infty.$$

Здесь

$$\boldsymbol{f}^{(1)}_{(N)} = \int\limits_0^{2\pi} \Big\{ \Big[\wp^{(1)}_{(0)} a^N + N \Big(\frac{\partial \wp^{(1)}_{(0)}}{\partial r}\, a + \wp^{(1)}_{(1)} \Big) \Big] \cdot \boldsymbol{e}_R \Big\}\Big|_{r=1}\, d\theta \tag{3.11}$$

($\wp^{(1)}_{(0)}$ и $\wp^{(1)}_{(1)}$ есть $\wp$ при $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(1)}_{(0)}$, $p = p^{(1)}_{(0)}$ и $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(1)}_{(1)}$, $p = p^{(1)}_{(1)}$ соответственно).

Пусть $N = 0$.

Согласно (3.10), (3.11)

$$\boldsymbol{v}^{(1)}_{(0)} = \nabla \times (\psi_{(0)} \boldsymbol{e}_Z),$$

$$p^{(1)}_{(0)} = \Big[-\frac{dw_{(0)}}{d\tau} \sin\theta - \frac{\partial^2 \psi_{(0)}}{\partial \tau\, \partial r} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Big(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\, (r \psi_{(0)}) \Big) \Big] r \operatorname{ctg}\theta + c_{(0)};$$

$$\boldsymbol{w}^{(1)}_{(0)} = w_{(0)} \boldsymbol{e}_X, \qquad w_{(0)} = \mathrm{Real} \sum_{n=1}^{\infty} w_{(0)n}\, \mathrm{e}^{2n\pi i \tau}; \tag{3.12}$$

$$\boldsymbol{f}^{(1)}_{(0)} = f_{(0)} \boldsymbol{e}_X, \qquad f_{(0)} = \pi \Big(\frac{dw_{(0)}}{d\tau} + \frac{2}{\mathrm{Re}}\, \mathrm{Real} \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - w_{(0)n}) q_n^2\, \frac{K_2(q_n)}{K_0(q_n)}\, \mathrm{e}^{2n\pi i \tau} \Big). \tag{3.13}$$

Здесь

$$\psi_{(0)} = \Big((u - w_{(0)}) r^2 - \mathrm{Real} \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - w_{(0)n})\, \frac{q_n K_2(q_n) - 2r K_1(q_n r)}{q_n K_0(q_n)}\, \mathrm{e}^{2n\pi i \tau} \Big) \frac{\sin\theta}{r};$$

$\boldsymbol{e}_Z = \{0, 0, 1\}$; $w_{(0)n}$ — постоянные; $c_{(0)}$ — функция τ; $q_n = (1 + i)\sqrt{n\pi\,\mathrm{Re}}$; K_0, K_1, K_2 — функции Макдональда.

Используя (3.9), (3.12), (3.13), получим

$$w_{(0)n} = 2 u_n q_n K_2(q_n)/D_n \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

где $D_n = (\mu + 1) q_n K_0(q_n) + 4 K_1(q_n)$ ($D_n \ne 0$ при $0 \leqslant \mu < \infty$, $0 < \mathrm{Re} < \infty$ (см. [19])).

Пусть $N = 1$.

Согласно (3.10), (3.11)

$$\boldsymbol{v}^{(1)}_{(1)} = \nabla \times (\bar\psi_{(1)} \boldsymbol{e}_Z) + \tilde{\boldsymbol{v}}_{(1)},$$

$$p^{(1)}_{(1)} = \Big\{ \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Big[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\, (r \bar\psi_{(1)}) \Big] - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \Big(r \int\limits_0^1 \frac{\partial \psi_{(0)}}{\partial r} \frac{da}{d\tau}\, d\tau \Big) \Big\} r \operatorname{ctg}\theta + \tilde p_{(1)} + c_{(1)};$$

$$\boldsymbol{w}^{(1)}_{(1)} = (\bar w_{(1)} + \tilde w_{(1)}) \boldsymbol{e}_X; \tag{3.14}$$

$$\boldsymbol{f}^{(1)}_{(1)} = (\bar f_{(1)} + \tilde f_{(1)}) \boldsymbol{e}_X. \tag{3.15}$$

Здесь

$$\bar\psi_{(1)} = \Big(-\bar w_{(1)} r^2 + \frac{1 - \mu}{32}\, \mathrm{Real} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* u_n\, \frac{q_n^2}{D_n}\, \big[2 q_n K_0(q_n) - (q_n^2 + 4) K_1(q_n) + q_n^3 \chi_n \big|_{r=1} +$$

$$+ 2 q_n r^2 K_0(q_n r) - r (q_n^2 r^2 + 12) K_1(q_n r) + q_n r^2 (q_n^2 r^2 + 8) \chi_n \big] \Big) \frac{\sin\theta}{r};$$

a_n^* — постоянные, комплексно-сопряженные с постоянными a_n;

$$\chi_n = \int\limits_r^\infty \frac{K_0(q_n r')}{r'}\,dr'; \quad \tilde{\boldsymbol{v}}_{(1)} = \mathrm{Real}\sum_{n=1}^\infty \boldsymbol{v}_n\,\mathrm{e}^{2n\pi i\tau}; \quad \tilde{p}_{(1)} = \mathrm{Real}\sum_{n=1}^\infty p_n\,\mathrm{e}^{2n\pi i\tau};$$

$\boldsymbol{v}_n$, p_n — функции r, θ; $c_{(1)}$ — функция τ;

$$\bar{w}_{(1)} = \frac{1-\mu}{16}\,\mathrm{Real}\sum_{n=1}^\infty a_n^* u_n\,\frac{q_n^2}{D_n}\,\big[2q_n K_0(q_n) - (q_n^2+8)K_1(q_n) + q_n(q_n^2+4)\chi_n\big|_{r=1}\big]; \qquad (3.16)$$

$$\tilde{w}_{(1)} = \mathrm{Real}\sum_{n=1}^\infty w_{(1)n}\,\mathrm{e}^{2n\pi i\tau};$$

$w_{(1)n}$ — постоянные;

$$\bar{f}_{(1)} = -2\pi^2\,\mathrm{Imag}\sum_{n=1}^\infty n a_n^* u_n; \qquad (3.17)$$

$$\tilde{f}_{(1)} = \mathrm{Real}\sum_{n=1}^\infty f_{(1)n}\,\mathrm{e}^{2n\pi i\tau};$$

$f_{(1)n}$ — постоянные.

Используя (3.9), (3.14), (3.15), (3.17), получим

$$2\pi^2\,\mathrm{Imag}\sum_{n=1}^\infty n a_n^* u_n = f_{\text{в}}. \qquad (3.18)$$

Соотношение (3.18), связывающее между собой пульсации радиуса цилиндра, колебания скорости жидкости на бесконечности и оказываемое на цилиндр внешнее силовое воздействие, представляет собой необходимое и достаточное условие существования решения задачи о среднем по времени движении цилиндра.

В соответствии с (3.18) пульсации тела, колебания жидкости и внешнее силовое воздействие подразделяются на “разрешенные” и “запрещенные”.

3.2. Пусть $\varepsilon \neq 0$, $\varkappa \neq 0$ ($\varepsilon > 0$, $\varkappa > 0$) и выполняется (3.18). Тогда согласно (3.2), (3.6), (3.8), (3.12), (3.14)

$$\boldsymbol{S} = \bar{\boldsymbol{W}} t + \tilde{\boldsymbol{S}}.$$

Здесь $\bar{\boldsymbol{W}} = \varepsilon\varkappa(A_0/T)\bar{w}_{(1)}\boldsymbol{e}_X$ — средняя по времени скорость цилиндра; $\bar{w}_{(1)}$ — величина, которая определяется формулой (3.16);

$$\tilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}_0 + \mathrm{Real}\sum_{n=1}^\infty S_n\,\mathrm{e}^{2n\pi i\tau}\,\boldsymbol{e}_X;$$

$\boldsymbol{S}_0$, S_n — постоянные.

4. Остановимся на эффекте преимущественно однонаправленного движения сжимаемого твердого тела в колеблющейся жидкости.

Данный эффект не связан с тем, что тело подвергается внешнему силовому воздействию [7, 14]. Ввиду этого положим $f_{\text{в}} = 0$.

Используя (3.18), получим

$$\mathrm{Imag}\sum_{n=1}^\infty n a_n^* u_n = 0. \qquad (4.1)$$

Соотношение (4.1), связывающее между собой пульсации радиуса цилиндра и колебания скорости жидкости на бесконечности (при $\bar{w}_{(1)} \neq 0$), представляет собой необходимое и достаточное условие совершения цилиндром преимущественно однонаправленного движения.

Отметим, что (4.1) выполняется, например, при $a = u = \cos{(2\pi\tau)}$.

Подчеркнем, что в пространственной модели, построенной в [14], какие-либо условия, аналогичные (4.1), отсутствуют.

5. Вернемся к соотношению (3.18).

5.1. В стационарной составляющей задачи о движении жидкости вокруг цилиндра числом Рейнольдса является величина

$$\mathrm{Re}' = \varepsilon\varkappa\,\mathrm{Re}\,. \qquad (5.1)$$

Согласно (5.1) при $\varepsilon \to 0$, $\varkappa \to 0$ (и постоянном Re) $\mathrm{Re}' \to 0$, т. е. в данной подзадаче имеет место стационарное обтекание цилиндра вязкой жидкостью в приближении малых значений числа Рейнольдса Re'. При этом "классический" парадокс Стокса (см., например, [20]) отсутствует. Тем не менее в данной подзадаче содержится особенность, аналогичная, родственная парадоксу Стокса; выражение (3.16) для $\bar{w}_{(1)}$ определяется уже при нахождении решения подзадачи о течении жидкости без использования уравнения (3.9). Ввиду этого уравнением (3.9) обусловливается возникновение дополнительного условия — соотношения (3.18), которому должны удовлетворять пульсации тела, колебания жидкости и внешнее силовое воздействие. Таким образом, причина присутствия в плоской модели соотношения (3.18) состоит в малости значений числа Рейнольдса Re'.

5.2. В соответствии с (3.18) любые "запрещенные" пульсации тела, колебания жидкости и внешнее силовое воздействие могут быть сделаны "разрешенными" посредством коррекции внешнего силового воздействия. Таким образом, в плоской модели при любых пульсациях тела и колебаниях жидкости происходит среднее по времени движение тела со скоростью $\bar{\boldsymbol{W}}$, если на тело оказывается "подходящее" внешнее силовое воздействие.

6. Как нетрудно заметить, для задачи, поставленной и решенной в настоящей работе, характерно то, что рассматриваемая в ней жидкость обладает бесконечно большой кинетической энергией. В связи с этим необходимо подчеркнуть, что такого рода ситуация имеет место, в частности, в любой плоской, пространственной, стационарной, нестационарной задаче о течении не ограниченной извне идеальной, вязкой, сжимаемой, несжимаемой жидкости, совершающей на бесконечности однородное движение; это, однако, не ставит под сомнение очевидную целесообразность изучения подобных задач.

Авторы выражают благодарность И. Е. Каревой за участие в данном исследовании на предварительном этапе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.
2. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // ПМТФ. 1986. № 4. С. 31–36.
3. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
4. **Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А.** О движении твердого тела в вибрирующей жидкости // Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1987. С. 61–71.
5. **Сенницкий В. Л.** О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1988. № 6. С. 107–113.

6. **Сенницкий В. Л.** Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
7. **Сенницкий В. Л.** Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1993. № 1. С. 100–101.
8. **Sennitskii V. L.** On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid // Proc. of the Intern. workshop on G-jitter, Potsdam, 13–19 June 1993. Potsdam (USA): Clarkson Univ., 1993. P. 178–186.
9. **Сенницкий В. Л.** Движение включений в вибрирующей жидкости: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1993.
10. **Сенницкий В. Л.** Движение включений в колеблющейся жидкости // Сиб. физ. журн. 1995. № 4. С. 18–26.
11. **Сенницкий В. Л.** О поведении газового пузыря в вязкой колеблющейся жидкости в присутствии силы тяжести // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 5. С. 73–79.
12. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
13. **Lavrenteva O. M.** On the motion of particles in non-uniformly vibrating liquid // Europ. J. Appl. Math. 1999. V. 10, pt 3. P. 251–263.
14. **Сенницкий В. Л.** О движении пульсирующего твердого тела в вязкой колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 82–86.
15. **Карева И. Е., Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 103–105.
16. **Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 4. С. 102–106.
17. **Сенницкий В. Л.** О движении включения в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 1. С. 79–85.
18. **Сенницкий В. Л.** О колебательном движении неоднородного твердого шара в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 6. С. 27–35.
19. **Erdélyi A., Kermack W. O.** Note on the equation $f(z)K_n'(z) - g(z)K_n(z) = 0$ // Proc. Cambr. Philos. Soc. 1945. V. 41, pt 1. P. 74–75.
20. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2.

Поступила в редакцию 9/XI 2011 г.,
в окончательном варианте — 13/VIII 2012 г.