3. **Райзер Ю. П.** О яркости сильных ударных волн в воздухе // ЖЭТФ.— 1957.— Т. 33, № 1.
4. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Ударные волны большой амплитуды в газах // УФН.— 1957.— Т. 63, № 3.
5. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
6. **Немчинов И. В., Орлова Т. И. и др.** О роли излучения при движении в атмосфере метеоритов с очень большими скоростями // ДАН СССР.— 1976.— Т. 231, № 5.
7. **Немчинов И. В., Светцов В. В., Шувалов В. В.** Решение задачи о распространении сильных интенсивно излучающих ударных волн в воздухе методом осреднения уравнений переноса излучения // Низкотемпературная плазма в космосе и на Земле.— М.: ВАГО, 1977.
8. **Немчинов И. В., Светцов В. В., Шувалов В. В.** О структуре прогревного слоя перед фронтом сильной интенсивно излучающей ударной волны // ПМТФ.— 1978.— № 5.
9. **Немчинов И. В., Светцов В. В., Шувалов В. В.** О яркости сильных ударных волн в воздухе пониженной плотности // ЖПС.— 1979.— Т. 30, № 6.
10. **Кузнецов Н. М.** Термодинамические функции и ударные адиабаты воздуха при высоких температурах.— М.: Машиностроение, 1965.
11. **Авилова И. В., Биберман Л. М., Воробьев В. С. и др.** Оптические свойства горячего воздуха.— М.: Наука, 1970.
12. **Немчинов И. В.** Об усредненных уравнениях переноса излучения и их использовании при решении газодинамических задач // ПММ.— 1970.— Т. 34, № 4.
13. **Немчинов И. В.** Осреднение уравнений переноса излучения в задачах радиационной газовой динамики.— М., 1983.— Деп. в ВИНИТИ 05.04.1983, № 1721—83.
14. **Буздин В. П., Добкин А. В., Косарев И. Б. и др.** Термодинамические и оптические свойства высокотемпературной плазмы.— М., 1983.— Деп. в ВИНИТИ 02.01.1984, № 52—84.
15. **Кваша Л. Г., Криник А. С.** Каталог метеоритов Академии Наук СССР 1 января 1977 г. // Метеоритика.— М.: Наука, 1978.— № 37.
16. **Shoemaker E. M.** Astronomically observable craterforming projectiles // Impact and explosive cratering/Ed. D. J. Roddy, R. O. Pepin, R. B. Merill.— N. Y.: Pergamon press, 1977.
17. **Магретова Н. Н., Пащенко Н. Т., Райзер Ю. П.** Структура ударной волны, в которой происходит многократная ионизация атомов // ПМТФ.— 1970.— № 5.

Поступила 9/XI 1987 г.

УДК 301.17.33.05.07

СХЛОПЫВАНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В СРЕДЕ, СОВЕРШЕННО ПРОЗРАЧНОЙ ДЛЯ ОБЪЕМНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Я. М. Каждан, И. Б. Щенков

(Москва)

При схлопывании сферической полости в окрестности центра и временах, близких к моменту схлопывания, в газодинамических характеристиках течения возникает ряд особенностей, которые в основном описываются автомодельным решением, соответствующим рассматриваемому процессу.

Известны автомодельные решения для газодинамических течений при схлопывании сферической полости, найденные в предположении изоэнтропичности потока [1]. В настоящей работе течения исследуются при наличии радиационных потерь в среде, совершенно прозрачной для объемного излучения, которые возникают при достаточно высокой температуре газа вне полости. При этом предполагается, что характер излучения отвечает тормозному механизму свободно-свободных переходов электронов, поскольку при достаточно высокой температуре все атомы вещества полностью ионизованы. Уравнения газодинамики, автомодельное решение которых определено ниже, отличаются от классической системы лишь наличием члена, соответствующего радиационным потерям в энергетическом уравнении [2]:

$$\frac{\partial\rho\left(e+\frac{u^2}{2}\right)r^2}{\partial t}+\frac{\partial\rho u\left(e+\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)r^2}{\partial r}=Q_0r^2\rho^\alpha T^\beta$$

(постоянная $Q_0<0$, $\alpha=2$, $\beta=1/2$). Тем не менее эта добавка существенно меняет характер течения: оно становится неизоэнтропическим; увеличивается показатель автомодельности по сравнению с показателем, полученным без учета радиационных потерь, что усиливает кумуляцию. Определение автомодельного решения осуществляется согласно принципам [1], однако оно значительно усложнено ввиду отсутствия в рассматриваемом случае интеграла адиабатичности.

1. Математическая постановка задачи. В автомодельном решении уравнение состояния газа предполагается политропичным:

$$p = \rho c^2/\varkappa, \; e = p/[(\varkappa - 1)\rho], \; T = p/(R\rho) = c^2/(\varkappa R).$$

Здесь p — давление; e — удельная внутренняя энергия; ρ — плотность; T — температура; c — скорость звука; R — универсальная газовая постоянная; $\varkappa$ — показатель политропы.

При схлопывании сферической полости r и t — расстояние от центра полости и время, отсчитываемое от момента схлопывания ($t < 0$). После перехода к безразмерным величинам

$$t = t_0 t, \quad r = r_0 r, \quad c^2 = r_0^2 c^2/t_0^2, \quad u = r_0 u/t_0, \quad \rho = \rho_0 \rho, \quad p = \rho_0 r_0^2 p/t_0^2,$$

где какие-либо две величины (например, ρ_0 и t_0) — произвольные положительные постоянные соответствующей размерности, а

$$r_0 = \left[\frac{\varkappa(\varkappa - 1) Q_0}{(\varkappa R)^\beta}\right]^{1/2(1-\beta)} t_0^{(3-2\beta)/2(1-\beta)} \rho_0^{(\alpha-1)/2(1-\beta)},$$

уравнения, описывающие газодинамические процессы в среде, совершенно прозрачной для объемного излучения, для сферической симметрии имеют вид

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial c^2}{\partial t} + u\left(\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial c^2}{\partial r}\right) + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\varkappa}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial c^2}{\partial t} + u\frac{\partial c^2}{\partial r}\right) + (\varkappa - 1)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right) - \varkappa^{\alpha-1} p^{\alpha-1} c^{2(\beta-\alpha)} = 0.$$

Искомое решение должно удовлетворять условиям: на границе полости, являющейся свободной поверхностью,

$$dr/dt = u, \; p = 0, \; c^2 = 0; \tag{1.2}$$

в центре ($r = 0, \; t > 0$)

$$u(0, t) = 0. \tag{1.3}$$

При $r \to \infty$ давление и скорость звука ограничены.

Поставленная задача допускает автомодельное решение. Система (1.1) в совокупности с граничными условиями (1.2) и (1.3) выдерживает группу преобразований

$$r \to ar, \; t \to a^k t, \; u \to a^{1-k} u, \; c^2 \to a^{2(1-k)} c^2, \; p \to a^{\frac{2(1-k)(\alpha-\beta)-k}{\alpha-1}} p$$

с любым показателем k. Это позволяет искать автомодельное решение в форме

$$u = \frac{r}{t} U(\xi), \quad c^2 = \frac{r^2}{t^2} F(\xi), \quad p = r^{2(\alpha-\beta)/(\alpha-1)} \times \tag{1.4}$$

$$\times |t|^{[2(\beta-\alpha)-1]/(\alpha-1)} P(\xi) \quad (\xi = \xi_0 r^{-k} t).$$

Подставляя (1.4) в (1.1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для автомодельных представителей $F(\xi)$, $U(\xi)$ и $P(\xi)$:

$$(1 - kU)\left(\frac{F'}{F} - \frac{P'}{P}\right)\xi - kU'\xi + \frac{3\alpha - 2\beta - 1}{\alpha - 1} U - \frac{3 - 2\beta}{\alpha - 1} = 0; \tag{1.5а}$$

$$\frac{\varkappa(1 - kU)}{F} U'\xi - k\frac{P'}{P}\xi + \varkappa\frac{U^2 - U}{F} + \frac{2(\alpha - \beta)}{\alpha - 1} = 0; \tag{1.5б}$$

$$(1 - kU)\frac{F'}{F}\xi - (\varkappa - 1)kU'\xi + (3\varkappa - 1)U + \varkappa^{\alpha-1} P^{\alpha-1} F^{\beta-\alpha} - 2 = 0. \tag{1.5в}$$

Граничные условия для нее следуют из (1.2) и (1.3). Границе полости в силу автомодельности отвечает линия $\xi = \mathrm{const}$. Не нарушая общности, при соответствующем выборе значения ξ_0 можно считать $\xi = 1$. Вдоль линии $\xi = \mathrm{const}$ $dr/dt = r/kt$, поэтому из (1.2) вытекает

$$\xi = 1:\ U(1) = 1/k,\ P = 0,\ F = 0. \tag{1.6}$$

Центру ($r = 0$, $t > 0$) отвечает линия $\xi = -\infty$, и в силу (1.3) и (1.4)

$$|U(\xi)\xi^{-1/k}| \to 0 \text{ при } \xi \to -\infty. \tag{1.7}$$

Фокусировочному разрезу ($t = 0$, $r > 0$) соответствует линия $\xi = 0$, вдоль которой давление, скорость, скорость звука — функции только от радиуса. Поэтому искомое решение при $\xi \to 0$ имеет асимптотику

$$P(\xi) \sim \xi^{[1+2(\alpha-\beta)]/(\alpha-1)},\quad U(\xi) \sim \xi,\quad F(\xi) \sim \xi^2, \tag{1.8}$$

откуда при $r \to \infty$ в силу требования ограниченности функций $p(r, t)$, $u(r, t)$, $c^2(r, t)$ следует неравенство $k \geqslant 1$.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к нахождению показателя автомодельности k ($k \geqslant 1$), при котором существует решение системы (1.5), удовлетворяющее условиям (1.6)—(1.9), и к получению данного решения.

2. Определение значения показателя автомодельности k. Систему (1.5) представим в виде двух уравнений в фазовом пространстве (U, F, P)

$$\frac{dF}{dU} = F\frac{[\varkappa(1-kU)^2 - k^2F]\,b + (\varkappa-1)\,k\,[(1-kU)\,a + kdF]}{(1-kU)\,[(1-kU)\,a + k\,(b+d)\,F]}, \tag{2.1}$$

$$\frac{dP}{dU} = P\frac{\varkappa\,[ka + (1-kU)\,(b+d)]}{(1-kU)\,a + k\,(b+d)\,F}$$

и квадратуры

$$\xi\frac{dU}{d\xi} = \frac{a\,(1-kU) + k\,(b+d)\,F}{\varkappa\,[k^2F - (1-kU)^2]}. \tag{2.2}$$

Здесь

$$a = \varkappa(U^2 - U),\quad b = (3\varkappa - 1)U \pm \varkappa^{\alpha-1}P^{\alpha-1}F^{\beta-\alpha} - 2 \tag{2.3}$$

$$(+ \text{ при } t < 0,\ - \text{ при } t > 0),$$

$$d = \frac{3\alpha - 2\beta - 1}{\alpha - 1}\,U - \frac{3 - 2\beta}{\alpha - 1}.$$

Начальные данные (1.6) ($\xi = 1$) определяют особую точку A системы (2.1). Нетривиальному решению, выходящему из точки A, отвечает асимптотика

$$F = F_0\,(1 - kU),\quad P = P_0(1 - kU)^{(\alpha-\beta)/(\alpha-1)} \tag{2.4}$$

$$\left(F_0 = \frac{\varkappa\,(k-1)\,(\alpha-1)}{k^2\,[3\alpha - 2\beta - 1 - (3 - 2\beta)\,k]},\right.$$

$$\left.P_0 = \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{\varkappa\,[\beta - 1 - k\,(3 - 2\beta)]}{(\alpha-\beta)\,k} + \frac{1}{k} + 2\right]^{1/(\alpha-1)} F_0^{(\alpha-\beta)/(\alpha-1)}\right).$$

Согласно (2.2) и (2.4), при $\xi \to 1$

$$U = \frac{1}{k} + U_0\,(1 - \xi)\quad \left(U_0 = \frac{1 - \beta + k\,(3 - 2\beta)}{(\alpha-\beta)\,k} - \frac{3\varkappa}{k} < 0\right). \tag{2.5}$$

Таким образом, на свободной поверхности p, ρ, T и функция энтропии $S = p\rho^{-\varkappa}$ обращаются в нуль. При изменениях ξ от 1 до 0 должно существовать такое значение ξ_1($0 < \xi_1 < 1$), при котором

$$R = k^2F - (1 - kU)^2 = 0. \tag{2.6}$$

При $0 < 1 - \xi < \varepsilon$ (ε достаточно мало), согласно (2.4) и (2.5), $R > 0$, а при $\xi = 0$, согласно (1.8), $R < 0$. Для однозначной зависимости газодинамических величин от ξ необходимо, чтобы при $\xi = \xi_1$

(2.7) $$a(1-kU)+k(b+d)F=0.$$

При этом из (2.6) и (2.7) следует обращение в нуль числителей правых частей системы (2.1). Линия $\xi = \xi_1$ в плоскости (r, t) соответствует характеристике, приходящей в центр в момент фокусировки.

Уравнение такой характеристики и соотношения вдоль нее имеют вид

$$\frac{dr}{dt} = u - c, \quad \frac{1}{p}\frac{dp}{dt} - \frac{\varkappa}{c}\frac{du}{dt} = -\frac{2\varkappa u}{r} + \varkappa^{\alpha-1}p^{\alpha-1}c^{2(\beta-\alpha)}.$$

Значит, вдоль линии $\xi = \mathrm{const}$, являющейся характеристикой, должно выполняться соотношение $r/kt = u - c$ или при переходе к автомодельным переменным $1 - k(U - \sqrt{F}) = 0$, т. е. равенство $R = 0$. Соотношение вдоль характеристики после перехода к автомодельным переменным с учетом $R = 0$ преобразуется в равенство (2.7), а (2.6) и (2.7) определяют особую линию системы (2.1), которую должна пересечь в особой точке искомая интегральная кривая в фазовом пространстве.

3. Интегрирование в окрестности особой точки. Для устранения дробных степеней введем нeременную

(3.1) $$T = P^{\alpha-1}F^{\beta-\alpha}.$$

При этом систему (1.8) перепишем как

(3.2) $$\frac{dF}{dU} = \frac{F}{1-kU}[(\varkappa-1)k + \varkappa b\Phi],$$

$$\frac{dT}{dU} = \frac{T}{1-kU}\{k[(\alpha-\beta)+\varkappa(b-1)] + \varkappa[(\beta-1)b + (\alpha-1)d]\Phi\}.$$

Здесь $\Phi = \dfrac{(1-kU)^2 - k^2F}{(1-kU)a + k(b+d)F}$; a, b, d получим из (2.3) с учетом замены (3.1). Показатель автомодельности находится из условия существования интегральной кривой, выходящей из точки A и пересекающей особую линию, определенную соотношениями (2.6) и (2.7).

Уравнение этой линии запишем в явном виде

(3.3) $$F = \frac{1}{k}(1-kU)^2, \quad T = \varkappa^{1-\alpha}\left\{-\frac{U}{1-kU}[2\varkappa(1-kU) - \varkappa(k-1)] + \right.$$
$$\left. + \frac{2(\alpha-\beta)(k-1)+k}{k(\alpha-1)}\right\}.$$

Из результатов численного счета следует, что желаемое пересечение осуществляется для целого диапазона значений k в особой точке B, являющейся функцией k:

(3.4) $$1{,}06 < k < 1{,}18.$$

Характер особой точки определяется корнями характеристического полинома, общее представление которого может быть получено следующим образом.

Пусть U_0, F_0, T_0 — координаты особой точки. В результате замены переменных $U = U_0 + x$, $F = F_0 + f$, $T = T_0 + t$ в окрестности точки система (3.2) в главных членах имеет вид

$$\frac{df}{dx} = f_0 + f_1\frac{a_1x + b_1f}{c_1x + d_1f + e_1t}, \quad \frac{dt}{dx} = t_0 + t_1\frac{a_1x + b_1t}{c_1x + d_1t + e_1t}.$$

Входящие в нее коэффициенты — функции от координат особой точки. Характеристический полином системы

(3.5) $$\begin{vmatrix} f_0d_1 + b_1f_1 - \lambda & e_1f_0 & c_1f_0 + a_1f_1 \\ t_0d_1 + b_1t_1 & e_1t_0 - \lambda & c_1t_0 + a_1t_1 \\ d_1 & e_1 & c_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Легко видеть, что один из корней полинома (3.5) равен нулю. При этом после соответствующей линейной замены переменных фазовое пространство расслаивается на двумерные плоскости, в каждой из которых картина расположения интегральных кривых в окрестности особой точки одна и та же. Два других корня, полученных для серии значений k из диапазона (3.4), оказались одного знака. Таким образом, характер особой точки B в рассмотренных случаях — обобщенный узел, и, следовательно, интегральные кривые входят в эту точку неаналитическим образом, т. е. возникает слабый разрыв. Так как линия $\xi = \xi_1$, отвечающая точке B,— характеристика системы, то слабый разрыв на ней допустим. Однако в рассматриваемой задаче до момента схлопывания эта характеристика с физической точки зрения ничем не выделена. Поэтому в данном случае слабый разрыв не оправдан, а наша цель — определить значение k, при котором прохождение интегральной кривой через B аналитическое.

Для того чтобы отличить аналитическую кривую от прочих, принадлежащих пучку, воспользуемся приемом из [1]. Пусть λ_1 и λ_2 — корни характеристического полинома, $|\lambda_2| > |\lambda_1|$. Тогда в окрестности точки B имеет место разложение

$$F = F_0 + F_1(U - U_0) + \ldots + F_n(U - U_0)^n + C_F(U - U_0)^\delta + F_{n+1}(U - U_0)^{n+1} + \ldots, \tag{3.6}$$

$$T = T_0 + T_1(U - U_0) + \ldots + T_n(U - U_0)^n + C_T(U - U_0)^\delta + T_{n+1}(U - U_0)^{n+1} + \ldots,$$

где $n < \delta = \lambda_2/\lambda_1 < n + 1$; C_F — произвольное число; C_T — функция от C_F. Угловые коэффициенты касательных к интегральным кривым в точке B могут иметь два значения:

$$F_1 = \frac{k^2D + CM - L}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{k^2D + CM - L}{2M}\right)^2 + \frac{LC - 2DV_0}{M}}, \tag{3.7}$$

$$T_1 = \frac{AD - BC + BF_1}{D}.$$

Здесь

$$L = a_0 + \frac{\varkappa V_0(2V_0 - 2 + k) - V_0^2\left(3\varkappa + 2\frac{\alpha - \beta}{\alpha - 1} - k\varkappa^{\alpha-1}\left(A - \frac{B}{b}\right)\right)}{k^2}, \tag{3.8}$$

$$M = \frac{2(\alpha - \beta)}{\alpha - 1}V_0 - k(b_0 + d_0) + \frac{\varkappa^{\alpha-1}V_0^2B}{k^2D}, \quad A = \frac{T_0}{V_0}[\varkappa(1 - \beta) + \beta - \alpha],$$

$$B = \frac{T_0}{V_0}\varkappa[(1 - \beta)b_0 - (\alpha - 1)d_0], \quad D = -\frac{(\varkappa - 1)F_0b_0}{kV_0},$$

$$a_0 = \varkappa(U_0^2 - U_0) + 2\frac{\alpha - \beta}{\alpha - 1}F_0,$$

$$b_0 = \frac{3\varkappa - 1}{k}(V_0 - 1) + \varkappa^{\alpha-1}T_0 + 2, \quad d_0 = \frac{3\alpha - 2\beta - 1}{(\alpha - 1)k}(V_0 - 1) + \frac{3 - 2\beta}{\alpha - 1}, \quad V_0 = 1 - kU_0.$$

Искомая интегральная кривая принадлежит пучку кривых, входящих в узел с общей касательной, угловой коэффициент которой находится из формул (3.7), (3.8), где перед радикалом стоит знак +. Коэффициенты F_k и T_k при $k \geqslant 2$ определяются однозначно, как решения системы линейных уравнений, полученных после подстановки разложений (3.6) в систему (3.2). Совершим замену переменных:

$$y_1 = \frac{F - F_0 - F_1x - \ldots - F_nx^n}{x^{n+1}} - F_{n+1}, \tag{3.9}$$

$$y_2 = \frac{T - T_0 - T_1x - \ldots - T_nx^n}{x^{n+1}} - T_{n+1}.$$

Очевидно, для всех кривых пучка, у которых C_F и C_T отличны от нуля, при $x = 0$ функции y_1 и y_2 обращаются в бесконечность. Согласно теореме Брио и Буке, в пучке интегральных кривых, входящих в узел и имеющих в этой точке общую касательную, должна быть одна аналитическая кривая (или бесконечно много для дикритического узла), которой соответствуют значения C_F и C_T, равные нулю. Значит, у искомой аналитической кривой при $x = 0$ функции y_1 и y_2 обращаются в нуль, причем

$$\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{x=0} = F_{n+2}, \quad \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=0} = T_{n+2}. \tag{3.10}$$

Таким образом, процедура вычисления k сводится к следующим операциям. Для заданного k из интервала (3.4) находится точка пересечения B интегральной кривой, выходящей из точки A, согласно направлению (2.4), с особой линией (3.3). В окрестности B определяются коэффициенты разложения T_i и F_i и, в частности, то значение n, для которого $n < \delta < n + 1$. Совершив замену переменных (3.9) в системе (3.2), находим интегральную кривую, выходящую из точки $x = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, согласно направлению (3.10). Значение k будет искомым, если при $x = 1/k - U_0$ (значение x отвечает точке A), согласно (3.9), $F = 0$, $T = P_0^{\alpha-1}F_0^{\beta-\alpha}$, где P_0 и F_0 определены формулами (2.4), т. е. заданными начальными данными в точке A. Вычисление коэффициентов разложения T_i и F_i и переход к функциям y_1 и y_2 при $n > 1$ требуют громоздких выкладок, которые выполнены на ЭВМ с помощью системы символьно-аналитических преобразований SANTRA [3].

После замены переменных (3.9) система (3.2) имеет вид

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{P_i}{x^3R}, \tag{3.11}$$

где $$P_i = \sum_{k=3}^{9}\left(A_k^i + B_k^i y_1 + C_k^i y_2 + D_k^i y_i^2 + G_k^i y_1 y_2\right)x^k + E_k^i y_i^2 y_{3-i} x^k;$$

$$R = \sum_{k=1}^{7}\left(L_k + M_k y_1 + N_k y_2 + Q_k y_1 y_2\right)x^k; \quad A_3^i = 0, \quad D_k^i = G_k^i = 0 \quad (k \leqslant 4);$$

$$E_k^i = 0 \quad (k \leqslant 7); \quad M_k = N_k = 0 \quad (k \leqslant 2); \quad Q_k = 0 \quad (k \leqslant 5).$$

Искомое значение k, соответствующее аналитическому прохождению интегральной кривой через узел B, при $\alpha = 2$, $\beta = 1/2$, $\varkappa = 5/3$ равно 1,090853, в этой точке $U_B = 0{,}849530$, $F_B = 0{,}00451371$, $T_B = 0{,}103991$. Заметим, что в районе $k = 1{,}090853$ $\delta \approx 2$, поэтому в формулах (3.9) $n = 2$.

4. Прохождение интегральной кривой через точку, соответствующую фокусировочному разрезу. Определив k, продолжаем интегрирование системы (3.11), обеспечивающей аналитический выход из узла B, от точки B к точке O, в которой $U = 0$. При подходе к точке O имеет место асимптотика

$$F \approx F_0U^2, \quad T \approx T_0U. \tag{4.1}$$

Из уравнения, отвечающего квадратуре (2.2), вытекает, что точке фазового пространства ($U = 0$, $F = 0$, $T = 0$) соответствует значение $\xi = 0$, т. е. фокусировочный разрез $t = 0$. Согласно асимптотике (4.1) и определению T, получим, что $P \sim U^{[1+2(\alpha-\beta)]/(\alpha-1)}$, а из квадратуры (2.2), что $U \sim \xi$. Таким образом, с учетом (1.4) распределение газодинамических функций на фокусировочном разрезе $t = 0$ выглядит так: $u \sim r^{1-k}$, $c^2 \sim r^{2(1-k)}$, $p \sim r^{[2(\alpha-\beta)(1-k)-1]/(\alpha-1)}$. При продолжении интегрирования системы (3.2) ($t > 0$, $\xi < 0$) производные $U'(\xi)$, $F'(\xi)$, $T'(\xi)$ при некотором значении ξ^* становятся бесконечными, т. е. $U(\xi)$, $F(\xi)$, $T(\xi)$ перестают быть однозначными функциями от ξ. Это говорит о том, что не существует непрерывного автомодельного решения, соединяющего точку O, отвечающую фокусировочному разрезу, с точкой C ($r = 0$, $t > 0$), соответствующей центру, т. е. возникает отраженная от центра ударная волна (УВ), что, впрочем, и следовало ожидать из физических соображений.

5. Изучение решения в окрестности центра ($r = 0,\ t > 0$). В центре ($r = 0,\ t > 0$) скорость $u(0, t) = 0$, а давление $p(0, t)$ и скорость звука $c(0, t)$ должны быть конечными функциями времени t. Для автомодельных представителей граничные условия таковы:

$$\xi = -\infty,\ |U(\xi)\xi^{-1/k}| < \infty,\ P(\xi) \sim |\xi|^{2(\alpha-\beta)/(\alpha-1)k},\quad F(\xi) \sim |\xi|^{2/k}, \tag{5.1}$$

и, согласно определению,

$$T(\xi) \to T_0 = \mathrm{const},\ \xi \to -\infty. \tag{5.2}$$

Этим условиям удовлетворяет лишь конечное значение $U(\xi) \to U_0$ ($0 < U_0 < \infty$).

Допустим, что $U(\xi) \sim |\xi|^\gamma$. Тогда в силу (4.1) из уравнения (1.5в) имеем при $\gamma > 0$ ($|U(\xi)| \to \infty$) $-k\left(\frac{2(\alpha-\beta)}{(\alpha-1)k} - \frac{2}{k}\right) - k\gamma + \frac{3\alpha-2\beta-1}{\alpha-1} = 0$, значит, $\gamma = 3/k$, что противоречит условию $|U(\xi)\xi^{-1/k}| < \infty$. Предположим, что $\gamma < 0$ ($U(\xi) \to 0$), тогда $\left(\frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha-1} - 2\right)\frac{1}{k} - \frac{3-2\beta}{\alpha-1} = 0$, следовательно, $k = 2(1-\beta)/(3-2\beta) < 1$, что противоречит $k > 1$.

Таким образом, значение U_0 должно быть конечным, оно находится путем подстановки (5.1) и $U = U_0$ в (1.5а): $U_0 = [(3-2\beta)k + 2(\beta-1)]/(\alpha-1) > 0$. Значение T_0 определим, подставляя U_0 и (5.1), (5.2) в (1.5 в): $T_0 = \varkappa^{1-\alpha}[2/k + (3\varkappa-1)U_0 - 2] > 0$. Следовательно, при $\xi \to -\infty$ $U \to U_0$, $T \to T_0$, $F \to F_0\xi^{2/k}$.

Очевидно, для изучения поведения интегральных кривых в окрестности этой точки удобно совершить замену переменных

$$f = 1/F,\ U = U_0 + x,\ T = T_0 + y. \tag{5.3}$$

В результате имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T}{1-kU}\{k[\alpha-\beta+\varkappa(\beta-1)] + \varkappa[(\beta-1)c_1 + (\alpha-1)d_1]R\}, \tag{5.4}$$

$$\frac{df}{dx} = -\frac{f}{1-kU}\{(\varkappa-1)k + \varkappa cR\}.$$

Здесь $R = \dfrac{(1-kU)^2 f - k^2}{(1-kU)A_1 - kA_0x + k(c_1+d_1)}$;

$$A_0 = \frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha-1},\quad A_1 = \varkappa f\left[U_0^2 - U_0 + (2U_0-1)x + x^2\right];$$

$$c = c_0 + c_1,\ c_0 = 2(U_0 - 1/k),\ c_1 = (3\varkappa-1)x - x^{\alpha-1}y;$$

$$d_0 = \frac{(3\alpha-2\beta-1)U_0 - (3-2\beta)}{\alpha-1},\quad d_1 = \frac{3\alpha-2\beta-1}{\alpha-1}x.$$

Точка ($x = 0,\ y = 0,\ f = 0$) —особая точка системы (5.4). Корни характеристического полинома в окрестности точки определяются формулами $\lambda_1 = -k(\alpha-\beta)\varkappa^{\alpha-1}z_0$, $\lambda_2 = -2k\varkappa$, $\lambda_3 = 3k\varkappa$, $z_0 = kT_0/(1-kU_0)$ (при принятых значениях параметров два корня отрицательные и один положительный). Таким образом, это точка типа обобщенного седла. Интегральные кривые, выходящие из точки, либо совпадают с сепаратрисой седла, соответствующей направлению

$$y \approx y_0x,\ f \approx f_0x, \tag{5.5}$$

где $y_0 = \dfrac{5\varkappa[\alpha-\beta+\varkappa(\beta-1)]z_0}{\varkappa^\alpha(\beta-1)z_0 + 2\varkappa}$, $f_0 = \dfrac{5z_0\left[2\varkappa - (\alpha-\beta)\varkappa^{\alpha-1}z_0\right]}{T_0(U_0^2-U_0)\left[\varkappa^\alpha(\beta-1)z_0 + 2\varkappa\right]}$,

либо принадлежат пучку интегральных кривых, асимптотика которых при $x \to 0$

(5.6) $$y \approx y_1 x + \ldots + y_n x^n + C_1 x^{\gamma},\ f \approx C x^{\gamma}$$
$$(\gamma = 2\varkappa^{2-\alpha}/[(\alpha-\beta)z_0],\ z_0 = kT_0/(1-kU_0)).$$

При $\alpha = 2$, $\beta = 1/2$, $\varkappa = 5/3$ $\gamma = 20/9$, следовательно, $n = 2$; C произвольна, а y_1, y_2, C_1 находятся из формул

$$y_1 = \varkappa^{1-\alpha}\left[3\varkappa + (\alpha-\beta)\varkappa^{\alpha-1}z_0\right],\quad y_2 = \frac{(\alpha-\beta)\varkappa^{\alpha-1}ky_1(z_0+y_1)}{(1-kU_0)\left[2(\alpha-\beta)\varkappa^{\alpha-1}z_0+3\varkappa\right]},$$
$$C_1 = \frac{1}{5}C\frac{\varkappa}{k}\left(U_0^2 - U_0\right)\left[3\varkappa^{1-\alpha}(1-kU_0) - k(\beta-1)T_0\right].$$

Квадратуру, определяющую зависимость U, F, T от ξ, запишем в виде

(5.7) $$\xi\frac{dx}{d\xi} = \frac{(1-kU)A_1 - kA_0x + k(c_1+d_1)}{\varkappa\left[k^2 - f(1-kU)^2\right]}.$$

В результате подстановки в (5.7) формул (5.5) и (5.6) получим для каждой из представленных ими интегральной кривой соответствующую асимптотику для функции $x(\xi)$ при $\xi \to -\infty$: для сепаратрисы седла $x \sim |\xi|^{-2/k}$; для интегральной кривой, принадлежащей пучку, $x \sim |\xi|^{-2/k\gamma}$. В любом из этих случаев $F \sim |\xi|^{2/k}$, т. е. выполняются граничные условия (5.1), (5.2).

Таким образом, функции от времени, отвечающие значениям газодинамических величин в центре, выражаются как

$$u(0,\ t) = 0,\ c^2(0,\ t) = F_0 t^{2(1-k)/k},$$
$$p(0,\ t) = P_0 t^{[2(\alpha-\beta)(1-k)-k]/(\alpha-1)k},\ \rho(0,\ t) = R_0 t^{[2(1-\beta)(1-k)-k]/(\alpha-1)k}.$$

6. Определение фронта отраженной УВ. Ранее отмечено, что за фокусировочным разрезом возникает отраженная УВ. В силу автомодельности фронту отраженной УВ отвечает линия $\xi = \xi_ф = \mathrm{const}$, поэтому скорость УВ $D = r/kt$. Условия на фронте УВ для автомодельных представителей газодинамических функций перепишутся в виде

(6.1) $$U_1 = \frac{1}{k} - \frac{(\varkappa-1)L_0^2 + 2F_0}{(\varkappa+1)L_0},$$
$$F_1 = [\varkappa L_0(L_0 - L_1) + F_0]L_1/L_0,$$
$$T_1 = T_0(F/F_0)^{\beta-1}(L_0/L_1)^{\alpha-1},$$

где $L_0 = 1/k - U_0$; $L_1 = 1/k - U_1$; индекс 0 относится к функциям перед фронтом, 1 — за фронтом УВ.

Определим фронт УВ и значения газодинамических функций на нем. Для каждой интегральной кривой, выходящей из точки O в сторону $\xi < 0$, т. е. при $t > 0$, значения U_1, F_1, T_1, согласно формулам (6.1), дают в фазовом пространстве кривую Φ_0. Фронту УВ отвечает точка пересечения кривой Φ_0 с какой-либо интегральной кривой, выходящей из центра ($r = 0$, $t > 0$), согласно одной из асимптотик (5.5) или (5.6). Очевидно, имеется в виду, что переменные на этой кривой пересчитываются согласно формулам (5.3). С учетом трехмерности фазового пространства представляется невероятным, чтобы точка пересечения лежала на выходящей из центра сепаратрисе седла (асимптотика (5.5)), что и подтвердилось при вычислении. Пучок интегральных кривых, выходящих из центра, согласно асимптотике (5.6), при изменении C $(0 < C < \infty)$ образует в фазовом пространстве поверхность. Интегральная кривая Φ_0 пересеклась с этой поверхностью в точке, лежащей на кривой пучка, отвечающей $C = 1077$. Таким образом, полностью получено решение в фазовом пространстве. Зависимость автомодельных представителей газодинамических функций U, F, P от автомодельной переменной ξ определяется перед фронтом УВ согласно (2.2), за фронтом — согласно (5.7).

Итак, фронту отраженной УВ соответствует в плоскости (r, t) линия $\xi = \xi_ф = -0{,}8809676$; перед фронтом $U_0 = -0{,}579504$, $F_0 = 0{,}181274$, $P_0 = 0{,}00869383$; за фронтом $U_1 = 0{,}451876$, $F_1 = 0{,}304523$, $P_1 = 0{,}0524506$. Распределение газодинамических функций на фокусировочном разрезе: $u = 0{,}82318\ \xi_0 r^{1-k}$, $c^2 = 0{,}115196\ \xi_0^2 r^{2(1-k)}$, $p = 0{,}0463816\ \xi_0^4 \times r^{3-4k}$, $\rho = 0{,}671053\ \xi_0^2 r^{1-2k}$. Изменение во времени значений газодинамических функций в центре: $u(0, t)=0$. $p(0, t) = 1{,}524038 \cdot 10^{-6} |\xi_0|^{3/k} t^{3/k-4}$, $c^2(0, t) = 0{,}00028086\ |\xi_0|^{2/k} t^{2(1-k)/k}$, $\rho(0, t) = 0{,}009043\ |\xi_0|^{1/k}\ t^{1/k-2}$.

Авторы глубоко признательны В. С. Имшеннику, по предложению которого рассматривалась эта задача, за обсуждение полученных результатов, а также М. С. Гавреевой за оформление работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Брушлинский К. В., Каждан Я. М.** Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // УМН.— 1963.— Т. 18, вып. 2(110).
2. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Физматиздат, 1963.
3. **Щенков И. Б.** Система символьно-аналитических преобразований SANTRA. Входной язык.— М., 1987.— (Препр./Ин-т прикл. математики; № 19).

Поступила 26/XI 1987 г.

УДК 533.6.011

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НА УДАРНОЙ ВОЛНЕ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ

В. Г. Щербак

(Москва)

При исследовании обтекания затупленных тел сверхзвуковым потоком вязкого газа широкое применение нашла теория [1, 2]. В этих работах на основании анализа плоского и осесимметричного сверхзвукового обтекания тел была предложена двухслойная модель течения, состоящая из вязкого ударного слоя и области перехода через скачок уплотнения.

Уравнения, описывающие область перехода через скачок, один раз интегрируются, и полученные соотношения (обобщенные условия Рэнкина — Гюгонио) используются в качестве граничных условий на внешней границе вязкого ударного слоя. В отличие от классических условий Рэнкина — Гюгонио обобщенные условия учитывают эффекты молекулярного переноса в зоне скачка уплотнения. Впервые вопрос о влиянии вязкости и теплопроводности на течение однородного газа за сильно искривленной ударной волной (УВ) исследовался в [3].

При наличии в потоке химических реакций задача о течении в ударном слое в принципе уже не отделяется от задачи о структуре УВ из-за наличия в законах сохранения массы отдельных компонентов источникового члена. Для его учета в обобщенных соотношениях Рэнкина — Гюгонио необходимо решать задачу о структуре УВ и сопрягать с решением внутри ударного слоя. Избегая эту процедуру для замыкания задачи о вязком ударном слое, химическими реакциями внутри ударной волны пренебрегают, опуская в граничных условиях источниковый член. Отметим, что, как показано в [4], модифицированные соотношения Рэнкина — Гюгонио следует использовать и при больших числах Рейнольдса, так как применение обычных соотношений Рэнкина — Гюгонио приводит в общем случае к конечной ошибке из-за возникновения на границе источника (стока) химического компонента.

Проведенные в [5] приближенные аналитические оценки показали, что двухслойная модель с замороженным фронтом волны является оправданной для воздуха при $V_\infty \lesssim 7$ км/с. Представляет интерес численно оценить влияние химических реакций в переднем фронте УВ на характеристики течения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание плавно затупленного тела. Введем некоторую произвольную криволинейную систему координат, нормально связанных с обтекаемой поверхностью. Пусть $x^3 = \mathrm{const}$ — уравнение семейства поверхностей, параллельных поверхности тела; $x^3 = 0$, x^1, x^2 выбраны на поверхности. Будем исходить из упрощенных уравнений Навье — Стокса, в которых сохранены члены, составляющие уравнения Эйлера, уравнения пограничного слоя второго