РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2005, том 41, № 5

УДК 681.2.08

В. М. Ефимов, А. Л. Резник, А. В. Торгов

(Новосибирск)

ТЕОРЕМЫ ОТСЧЕТОВ ДЛЯ СИГНАЛОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ*

Получены интерполяционные соотношения для безошибочной реконструкции сигнала с ограниченным спектром при периодически неравномерной дискретизации сигнала и его производных. Вычислена дисперсия ошибки восстановления сигнала с неограниченным спектром при использовании этих соотношений.

Введение. В работе [1] получена теорема отсчетов для случая периодически неравномерной дискретизации сигнала. Это соотношение послужило основой для получения теоремы отсчетов при совместной равномерной дискретизации сигнала и его производных [2]. В данной работе рассматривается случай восстановления сигнала, когда осуществляется периодически неравномерная дискретизация: 1) сигнала и его первой производной; 2) сигнала, его первой и второй производных.

Периодически неравномерная дискретизация сигнала и его первой производной. Последующие результаты базируются на теореме отсчетов при периодически неравномерной дискретизации сигнала с ограниченным частотой $|\ \ |\quad /$ спектром [1]:

$$f(t) \qquad {}_{n}\ {}_{r\ \ 0}^{M\ \ 1} f(t_r \quad nM\ )\,\frac{\sin\frac{}{M}(t \quad t_r \quad nM\ )}{\frac{}{M}(t \quad t_r \quad nM\ )}\ {}_{\substack{k\ \ 0\\ k\ \ r}}^{M\ \ 1}\frac{\sin\frac{}{M}(t \quad t_k \quad nM\ )}{\sin\frac{}{M}(t_r \quad t_k\ )}, \qquad (1)$$

где $t_0 \quad t_1 \quad \ldots \quad t_{M\ \ 1} \quad M\ $; $M\ $ – период неравномерной дискретизации.

Рассмотрим ситуацию, когда величина M четна, а дискретизация сигнала осуществляется в моменты времени $t_0 \quad \frac{}{2} \quad n2N\ $, $t_0 \quad \frac{}{2} \quad n2N\ $,... ..., $t_{N\ \ 1} \quad \frac{}{2} \quad n2N\ $, $t_{N\ \ 1} \quad \frac{}{2} \quad n2N\ $ $(M \quad 2N)$. В этом случае в соответст-

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00913) и Президиума РАН (программа 2.13/2005).

вии с (1) отсчетные функции выглядят следующим образом:

$$w_{r}\ t \quad t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N \qquad \frac{\sin\frac{}{2N}\ t \quad t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N}{\frac{}{2N}\ t \quad t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N}\ \frac{\sin\frac{}{2N}\ t \quad t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N}{\sin\frac{}{2N}}$$

$$\sum_{\substack{k \quad 0 \\ k \quad r}}^{N \quad 1} \frac{\sin\frac{}{2N}\ t \quad t_k \quad \frac{}{2} \quad n2N \qquad \sin\frac{}{2N}\ t \quad t_k \quad \frac{}{2} \quad n2N}{\sin\frac{}{2N}(t_r \quad t_k)\ \sin\frac{}{2N}(t_r \quad t_k \quad)}; \tag{2}$$

$$w_{r}\ t \quad t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N \qquad \frac{\sin\frac{}{2N}\ t \quad t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N}{\frac{}{2N}\ t \quad t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N}\ \frac{\sin\frac{}{2N}\ t \quad t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N}{\sin\frac{}{2N}}$$

$$\sum_{\substack{k \quad 0 \\ k \quad r}}^{N \quad 1} \frac{\sin\frac{}{2N}\ t \quad t_k \quad \frac{}{2} \quad n2N \qquad \sin\frac{}{2N}\ t \quad t_k \quad \frac{}{2} \quad n2N}{\sin\frac{}{2N}(t_r \quad t_k \quad)\ \sin\frac{}{2N}(t_r \quad t_k)}. \tag{3}$$

Введем далее новые переменные [3]

$$f^{(0)}(t_r \quad n2N\ ) \quad \frac{1}{2}\ f\ \ t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N \qquad f\ \ t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N \quad ;$$

$$f^{(1)}(t_r \quad n2N\ ) \quad \frac{1}{}\ f\ \ t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N \qquad f\ \ t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N \quad , \tag{4}$$

где $r \quad \overline{0, N \quad 1}$. Решая эту простую систему уравнений относительно $f\ \ t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N$ и $f\ \ t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N$, получим

$$f\ \ t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N \qquad f^{(0)}(t_r \quad n2N\ ) \quad \frac{}{2} f^{(1)}(t_r \quad n2N\ );$$

$$f\ \ t_r \quad \frac{}{2} \quad n2N \qquad f^{(0)}(t_r \quad n2N\ ) \quad \frac{}{2} f^{(1)}(t_r \quad n2N\ ). \tag{5}$$

При $\quad 0$ величины $f^{(0)}(t_r \quad n2N\ )$ и $f^{(1)}(t_r \quad n2N\ )$ стремятся к значению сигнала и его производной в абсциссе, равной величине $(t_r \quad n2N\ )$.

Если учесть, что в соответствии с (1)

$$f(t) \quad {}_{n} \quad {}_{r\;\;0}^{N\;\;1} \; f \;\; t_r \;\; \frac{}{2} \;\; n2N \quad w_{\,r} \;\; t \;\; t_r \;\; \frac{}{2} \;\; n2N$$

$$f \;\; t_r \;\; \frac{}{2} \;\; n2N \quad w_{\,r} \;\; t \;\; t_r \;\; \frac{}{2} \;\; n2N \quad , \tag{6}$$

то, подставляя соотношения (5) в формулу (6), получим соотношение

$$f(t) \quad {}_{n} \quad {}_{r\;\;0}^{N\;\;1} (f^{(0)}(t_r \quad n2N \;\;) w_{(0)r}(t \quad t_r \quad n2N \;\;)$$

$$f^{(1)}(t_r \quad n2N \;\;) w_{(1)r}(t \quad t_r \quad n2N \;\;)), \tag{7}$$

где отсчетные функции

$$w_{(0)r}(t \quad t_r \quad n2N \;\;) \quad w_{\,r} \;\; t \;\; t_r \;\; \frac{}{2} \;\; n2N \qquad w_{\,r} \;\; t \;\; t_r \;\; \frac{}{2} \;\; n2N \quad ;$$

$$w_{(1)r}(t \quad t_r \quad n2N \;\;) \;\; \frac{}{2} \quad w_{\,r} \;\; t \;\; t_r \;\; \frac{}{2} \;\; n2N \qquad w_{\,r} \;\; t \;\; t_r \;\; \frac{}{2} \;\; n2N \quad . \tag{8}$$

Вычисление пределов в (8) (при 0) приводит к теореме отсчетов для сигнала с ограниченным спектром (| | /) при периодически неравномерной дискретизации сигнала и его первой производной:

$$f(t) \quad {}_{n} \quad {}_{r\;\;0}^{N\;\;1} \frac{\sin^2 \frac{}{2N}(t \quad t_r \quad n2N \;\;)}{\left(\frac{}{2N}\right)^2 (t \quad t_r \quad n2N \;\;)^2} \; {}_{\substack{k\;\;0\\ k\;\;r}}^{N\;\;1} \frac{\sin^2 \frac{}{2N}(t \quad t_k)}{\sin^2 \frac{}{2N}(t_r \quad t_k)} \quad f^{(0)}(t_r \quad n2N \;\;)$$

$$1 \quad (t \quad t_r \quad n2N \;\;) \frac{}{2N} \, g_{1r1} \qquad f^{(1)}(t_r \quad n2N \;\;)(t \quad t_r \quad n2N \;\;) \;\; , \tag{9}$$

где $g_{1r1} \quad 2 \; {}_{\substack{k\;\;0\\ k\;\;r}}^{N\;\;1} \operatorname{ctg} \frac{}{2N}(t_r \quad t_k)$.

Сравним теорему отсчетов (9) с соответствующей теоремой отсчетов при равномерной дискретизации из [2]:

$$f(t) \quad {}_{n} \quad \frac{\sin^2 \frac{}{2}(t \quad 2n \;\;)}{\left(\frac{}{2}\right)^2 (t \quad 2n \;\;)^2} [f^{(0)}(2n \;\;) \quad f^{(1)}(2n \;\;)(t \quad 2n \;\;)]. \tag{10}$$

3*

Соотношение (9) содержит множители $w_{0r}(t) \quad \frac{\sin^2 \frac{}{2N}(t \quad t_k)}{\sin^2 \frac{}{2N}(t_r \quad t_k)}$ с пределами $N \; 1$ и $\begin{smallmatrix} k & 0 \\ k & r \end{smallmatrix}$, учитывающие периодическую неравномерность дискретизации. Кроме того, дополнительные слагаемые $(t \quad t_r \quad n2N \;) \frac{}{2N} 2 \sum_{\substack{k \; 0 \\ k \; r}}^{N \; 1} \mathrm{ctg} \frac{}{2N}(t_r \quad t_k)$ обеспечивают равенство нулю производных отсчетных функций сигнала в моменты времени $\{t_r\}$. Отметим, что если абсциссы отсчетов удовлетворяют условию равномерной дискретизации $t_r \quad r2 \quad (r \quad \overline{0, N \quad 1})$, то теорема (9) превращается в теорему отсчетов (8).

Периодически неравномерная дискретизация сигнала, его первой и второй производных. Пусть далее в формуле (1) величина $M \quad 3N$, а дискретизация сигнала осуществляется в периодические моменты времени $t_0 \quad n3N$, $t_0 \quad n3N$, $t_0 \quad n3N$, ..., $t_{N \; 1} \quad n3N$, $t_{N \; 1} \quad n3N$, $t_{N \; 1} \quad n3N$. В этом случае из формулы (1) вытекают следующие соотношения для отсчетных функций:

$$w_{\;r}(t \quad t_r \quad n3N \;)$$

$$\frac{\sin\frac{}{3N}(t \quad t_r \quad n3N\;)\ \sin\frac{}{3N}(t \quad t_r \quad n3N\;)\ \sin\frac{}{3N}(t \quad t_r \quad n3N\;)}{\frac{}{3N}(t \quad t_r \quad n3N\;)\ \sin\frac{}{3N}(\quad)\ \sin\frac{}{3N}(\;2\;)}$$

$$\prod_{\substack{k \; 0 \\ k \; r}}^{N \; 1} \frac{\sin\frac{}{3N}(t \quad t_k \quad n3N\;)\ \sin\frac{}{3N}(t \quad t_k \quad n3N\;)\ \sin\frac{}{3N}(t \quad t_k \quad n3N\;)}{\sin\frac{}{3N}(t_r \quad t_k)\ \sin\frac{}{3N}(t_r \quad t_k \quad)\ \sin\frac{}{3N}(t_r \quad t_k \quad 2\;)};$$

$$w_r(t \quad t_r \quad n3N\;)$$

$$\frac{\sin\frac{}{3N}(t \quad t_r \quad n3N\;)\ \sin\frac{}{3N}(t \quad t_r \quad n3N\;)\ \sin\frac{}{3N}(t \quad t_r \quad n3N\;)}{\sin\frac{}{3N}\ \frac{}{3N}(t \quad t_r \quad n3N\;)\ \sin\frac{}{3N}(\quad)} \tag{11}$$

$$\prod_{\substack{k \; 0 \\ k \; r}}^{N \; 1} \frac{\sin\frac{}{3N}(t \quad t_k \quad n3N\;)\ \sin\frac{}{3N}(t \quad t_k \quad n3N\;)\ \sin\frac{}{3N}(t \quad t_k \quad n3N\;)}{\sin\frac{}{3N}(t_r \quad t_k \quad)\ \sin\frac{}{3N}(t_r \quad t_k)\ \sin\frac{}{3N}(t_r \quad t_k \quad)};$$

$$w_{\;r}(t \quad t_r \quad n3N\;)$$

$$\frac{\sin\frac{}{3N}(t \quad t_r \qquad n3N\ )\ \sin\frac{}{3N}(t \quad t_r \quad n3N\ )\ \sin\frac{}{3N}(t \quad t_r \qquad n3N\ )}{\sin\frac{}{3N}\,2 \quad \sin\frac{}{3N} \quad \frac{}{3N}(t \quad t_r \qquad n3N\ )}$$

$$\underset{k\ \ r}{\overset{N\quad 1}{\underset{k\quad 0}{}}}\ \frac{\sin\frac{}{3N}(t \quad t_k \qquad n3N\ )\ \sin\frac{}{3N}(t \quad t_k \quad n3N\ )\ \sin\frac{}{3N}(t \quad t_k \qquad n3N\ )}{\sin\frac{}{3N}(t_r \quad t_k \quad 2\ )\ \sin\frac{}{3N}(t_r \quad t_k \quad)\ \sin\frac{}{3N}(t_r \quad t_k\,)}.$$

где $r \quad \overline{0, N \quad 1}$.

Как и в предыдущем разделе, введем новые переменные (см. также [3])

$$f^{(0)}(t_0 \quad n3N\ )\ \ \frac{1}{3}(f(t_0 \qquad n3N\ )\quad f(t_0 \quad n3N\ )\quad f(t_0 \qquad n3N\ ));$$

$$f^{(1)}(t_0 \quad n3N\ )\ \ \frac{1}{2}(f(t_0 \qquad n3N\ )\quad f(t_0 \qquad n3N\ )); \tag{12}$$

$$f^{(2)}(t_0 \quad n3N\ )\ \ \frac{1}{2}(f(t_0 \qquad n3N\ )\quad 2f(t_0 \quad n3N\ )\quad f(t_0 \qquad n3N\ )).$$

Решение системы уравнений (12) относительно старых переменных дает следующие результаты:

$$f(t_r \qquad n3N\ )\quad f^{(0)}(t_r \quad n3N\ )\quad f^{(1)}(t_r \quad n3N\ )\quad \frac{2}{6}f^{(2)}(t_r \quad n3N\ );$$

$$f(t_r \quad n3N\ )\quad f^{(0)}(t_r \quad n3N\ )\quad \frac{2}{3}f^{(2)}(t_r \quad n3N\ ); \tag{13}$$

$$f(t_r \qquad n3N\ )\quad f^{(0)}(t_r \quad n3N\ )\quad f^{(1)}(t_r \quad n3N\ )\quad \frac{2}{6}f^{(2)}(t_r \quad n3N\ ).$$

В соответствии с (1)

$$f(t) \underset{n}{\ } \sum_{r\quad 0}^{N\quad 1}(f(t_r \qquad n3N\ )w_{\ r}(t \quad t_r \qquad n3N\ )$$

$$f(t_r \quad n3N\ )w_r(t \quad t_r \quad n3N\ )\quad f(t_r \qquad n3N\ )w_{\ r}(t \quad t_r \qquad n3N\ )). \tag{14}$$

Подставляя значения старых переменных из (13) в (14), получим соотношения

$$f(t) \underset{n}{\ } \sum_{r\quad 0}^{N\quad 1}(f^{(0)}(t_r \quad n3N\ )w_{(0)r}(t \quad t_r \quad n3N\ )$$

$$f^{(1)}(t_r \quad n3N \quad) w_{(1)r}(t \quad t_r \quad n3N \quad) \quad f^{(2)}(t_r \quad n3N \quad) w_{(2)r}(t \quad t_r \quad n3N \quad)), \tag{15}$$

где отсчетные функции

$$w_{(0)r}(t \quad t_r \quad n3N \quad) \quad w \;_r(t \quad t_r \qquad n3N \quad)$$

$$w_r(t \quad t_r \quad n3N \quad) \quad w \;_r(t \quad t_r \qquad n3N \quad);$$

$$w_{(1)r}(t \quad t_r \quad n3N \quad) \qquad (\; w \;_r(t \quad t_r \qquad n3N \quad) \quad w \;_r(t \quad t_r \qquad n3N \quad)); \tag{16}$$

$$w_{(2)r}(t \quad t_r \quad n3N \quad) \quad \frac{^2}{6}(w \;_r(t \quad t_r \qquad n3N \quad)$$

$$2w_r(t \quad t_r \quad n3N \quad) \quad w \;_r(t \quad t_r \qquad n3N \quad)).$$

При $\quad 0$ новые переменные стремятся соответственно к значению сигнала и его первой и второй производных, а отсчетные функции (16) – к соответствующим пределам. В итоге имеем теорему отсчетов при периодически неравномерной дискретизации сигнала и его первой и второй производных:

$$f(t) \quad \sum_{n} \sum_{r \; 0}^{N \;\; 1} \frac{\sin^3 \frac{}{3N}(t \quad t_r \quad n3N \quad)}{\frac{^3}{3N} \; (t \quad t_r \quad n3N \quad)^3} (\quad 1)^{n(N \quad 1)} \prod_{\substack{k \;\; 0 \\ k \;\; r}}^{N \;\; 1} \frac{\sin^3 \frac{}{3N}(t \quad t_k)}{\sin^3 \frac{}{3N}(t_r \quad t_k)}$$

$$f^{(0)}(t_r \quad n3N \quad) \; 1 \quad (t \quad t_r \quad n3N \quad) \frac{}{3N} g_{2r1} \quad (t \quad t_r \quad n3N \quad)^2 \; \frac{}{3N}^2 g_{2r2}$$

$$f^{(1)}(t_r \quad n3N \quad)(t \quad t_r \quad n3N \quad) \; 1 \quad (t \quad t_r \quad n3N \quad) \frac{}{3N} g_{2r1}$$

$$f^{(2)}(t_r \quad n3N \quad) \frac{1}{2!}(t \quad t_r \quad n3N \quad)^2 \;, \tag{17}$$

где

$$g_{2r1} \qquad 3 \sum_{\substack{k \;\; 0 \\ k \;\; r}}^{N \;\; 1} \mathrm{ctg} \frac{}{3N}(t_r \quad t_k),$$

$$g_{2r2} \quad \frac{1}{2} \; 3N \quad 2 \quad 3 \sum_{\substack{k \;\; 0 \\ k \;\; r}}^{N \;\; 1} \mathrm{ctg}^2 \frac{}{3N}(t_r \quad t_k) \quad 9 \sum_{\substack{k \;\; 0 \\ k \;\; r}}^{N \;\; 1} \mathrm{ctg} \frac{}{3N}(t_r \quad t_k)^2 \quad .$$

Если периодическая неравномерность дискретизации исчезает ($t_r \quad r3$, $r \quad 0, N \quad 1$), формула (17) переходит в соотношение [3]

$$f(t) \quad \sum_n \frac{\sin^3 \frac{}{3}(t \quad n3 \ )}{\frac{}{3}^3 (t \quad n3 \ )^3} \quad f^{(0)}(n3 \ ) \ 1 \quad \frac{1}{2}(t \quad n3 \ )^2 \ \frac{}{3}^2$$

$$f^{(1)}(n3 \ )(t \quad n3 \ ) \quad f^{(2)}(n3 \ )\frac{1}{2}(t \quad n3 \ )^2 \ , \tag{18}$$

так как в этом случае $g_{2r1} \quad 0$, а $g_{2r2} \quad N^2/2$.

Дисперсия ошибки восстановления. В данной работе получено соотношение для дисперсии ошибки реконструкции сигнала на частотах $| \ | \quad /$ при использовании теорем (9) и (17). В соответствии с теоремой (9) дисперсия ошибки

$$^2(t) \quad d \ S_f(\ )$$

$$\left| e^{i \ t} \quad \sum_n \sum_{r \ 0}^{N \ 1} e^{i \ (t_r \quad n2N \ )} [w_{(0)r}(t \quad t_r \quad n2N \ ) \quad i \ w_{(1)r}(t \quad t_r \quad n2N \ )] \right|^2, \tag{19}$$

где $w_{(0)r}(t \quad t_r \quad n2N \ )$, $w_{(1)r}(t \quad t_r \quad n2N \ )$ – отсчетные функции сигнала и его первой производной из соотношения (9).

Если учесть, что

$$\frac{\sin^2 \frac{}{2N}(t \quad t_r \quad n2N \ )}{\frac{}{2N}^2 (t \quad t_r \quad n2N \ )^2} \quad \frac{N}{} \int_{/N}^{/N} d \ e^{i \ (t \quad t_r \quad n2N \ )} \ 1 \quad \frac{N}{} \ ; \tag{20}$$

$$\frac{\sin^2 \frac{}{2N}(t \quad t_r \quad n2N \ )}{\frac{}{2N}^2 (t \quad t_r \quad n2N \ )^2}(t \quad t_r \quad n2N \ ) \quad i \ \frac{N}{}^2 \int_{/N}^{/N} d \ e^{i \ (t \quad t_r \quad n2N \ )} \mathrm{sign} \ ,$$

то после подстановки в соотношение (19) выражений для отсчетных функций с учетом (20) и использования разложения в тригонометрический ряд $\frac{}{N} n \quad \frac{N}{} \quad e^{i(\quad)n2N}$ получим

$$^2(t) \quad d \ S_f(\ ) \ 1 \quad \sum_{r \ 0}^{N \ 1} w_{0r}(t) \quad 1 \ 1 \quad \frac{N}{} \quad \sum_n n \ e^{i \frac{}{N} n(t \quad t_r)}$$

$$1 \quad \frac{N}{\quad} \quad n \quad \frac{N}{\quad}\mathrm{sign} \; \frac{N}{\quad} \quad n \quad i\frac{g_{1r1}}{2}\mathrm{sign} \; \frac{N}{\quad} \quad n \quad \Big|^{2}. \tag{21}$$

Так как

$$1\,1 \quad \frac{N}{\quad} \quad n \quad \mathrm{e}^{i\frac{}{N}n(t \quad t_r)}$$

$$1 \quad \frac{N}{\quad} \quad n \quad \frac{N}{\quad}\mathrm{sign} \; \frac{N}{\quad} \quad n \quad i\frac{g_{1r1}}{2}\mathrm{sign} \; \frac{N}{\quad} \quad n$$

$$\mathrm{e}^{i\frac{}{N}n(t \quad t_r)} \quad 1 \quad n \quad i\frac{q_{1r1}}{2} \; 1 \quad \frac{N}{\quad} \quad (n \quad 1) \quad n \quad \frac{N}{\quad}$$

$$1 \quad n \quad i\frac{g_{1r1}}{2} \; 1 \quad \frac{N}{\quad} \quad n \quad n \quad 1 \quad \frac{N}{\quad} \qquad ,$$

то при $n \quad \frac{N}{\quad} \quad n \quad 1$ множитель в соотношении (21) при функции $w_{0r}(t)$ есть

$$P_r(t,n) \qquad n \quad \frac{i}{2}g_{1r1} \quad \mathrm{e}^{i\frac{}{N}(n \quad 1)(t \quad t_r)} \qquad n \quad 1 \quad \frac{i}{2}g_{1r1} \quad \mathrm{e}^{i\frac{}{N}n(t \quad t_r)}.$$

В связи с этим после усреднения соотношения (21) по времени на интервале $N2$ формула для дисперсии ошибки приобретает следующий вид:

$$\left\langle \; ^2 \right\rangle \quad 2 \int_0 d \quad S_f(\;)\; 1 \sum_{n \quad 0} 1 \quad \frac{N}{\quad} \quad n \quad n \quad 1 \quad \frac{N}{\quad}$$

$$\sum_{r \quad 0}^{N \quad 1} \left\langle w_{0r}(t)(P_r(t,n) \quad P_r^*(t,n)) \right\rangle$$

$$\sum_{n \quad 0} 1 \quad \frac{N}{\quad} \quad n \quad n \quad 1 \quad \frac{N}{\quad} \quad \sum_{r \quad 0}^{N \quad 1}\sum_{p \quad 0}^{N \quad 1} \left\langle w_{0r}(t)w_{0p}(t)P_{rp}(t,n) \right\rangle \;, \tag{22}$$

где

$$P_{rp}(t,n) \quad P_r(t,n)P_r^*(t,n) \quad \cos\frac{}{N} \quad n \quad \frac{1}{2} \; (t_p \quad t_r)[a(r)a(p) \quad b(r)b(p)]$$

$$\sin\frac{}{N} \quad n \quad \frac{1}{2} \; (t_p \quad t_r)[a(r)b(p) \quad a(p)b(r)],$$

$$a(r) \quad \cos\frac{}{2N}(t \quad t_r) \quad g_{1r1}\sin\frac{}{2N}(t \quad t_r),$$

$$b(r) \quad g_{1r1} \cos \frac{}{2N}(t \quad t_r) \quad (2n \quad 1) \sin \frac{}{2N}(t \quad t_r).$$

Анализ показывает, что второе слагаемое под интегралом в (22) равно двум при $0 \quad n \quad N \quad 1$ и нулю при $n \quad N$, а третье слагаемое в (22) равно единице при $0 \quad n \quad N \quad 1$. Поэтому дисперсия ошибки

$$\left\langle \; ^2 \right\rangle \quad 2 \quad d \quad S_f(\;) \quad 2 \sum_{n \quad N} \int_{n \frac{}{N}}^{(n \quad 1)\frac{}{N}} d \quad S_f(\;) \sum_{r \quad 0}^{N \quad 1} \sum_{p \quad 0}^{N \quad 1} \left\langle w_{0r}(t) w_{0p}(t) P_{rp}(t,n) \right\rangle. \tag{23}$$

Это соотношение позволяет вычислить дисперсию реконструкции сигнала при помощи теоремы (9) на частотах $| \; | \quad / \;$.

При использовании теоремы (17) для сигнала с неограниченным по частоте спектром дисперсия ошибки

$$^2(t) \quad d \quad S_f(\quad \Bigg| \mathrm{e}^{\,i \quad t} \sum_{n} \sum_{r \quad 0}^{N \quad 1} \mathrm{e}^{\,i \quad (t_r \quad n3N \quad)}$$

$$[w_{(0)r}(t \quad t_r \quad n3N \quad) \quad i \quad w_{(1)r}(t \quad t_r \quad n3N \quad) \quad ^2 w_{(2)r}(t \quad t_r \quad n3N \quad)]\Bigg|^2, \tag{24}$$

где отсчетные функции сигнала, его первой и второй производных ($w_{(0)r}(t \quad t_r \quad n3N \quad)$, $w_{(1)r}(t \quad t_r \quad n3N \quad)$ и $w_{(2)r}(t \quad t_r \quad n3N \quad)$ соответственно) определяются соотношением (16).

Рассмотрим случай, когда величина N нечетна. Если воспользоваться равенством

$$\frac{\sin^3 \frac{}{3N}(t \quad t_r \quad n3N \quad)}{\frac{^3}{2N} \quad (t \quad t_r \quad n3N \quad)^{3 \quad m}} \quad (\quad i)^m \frac{N3}{2} \int_{/N}^{/N} d \quad \mathrm{e}^{\,i \quad (t \quad t_r \quad n3N \quad)} \quad ^{(m)}(\;), \tag{25}$$

где

$$^{(0)}(\;) \quad \frac{1}{2}\frac{3N}{2}^2 \quad \frac{}{N} \quad ^2 1 \quad \frac{}{N} \quad \frac{}{3N}$$

$$1 \quad \frac{1}{2}\frac{3N}{2}^2 \quad \frac{}{3N} \quad ^2 \quad \frac{1}{2}\frac{3N}{2}^2 \quad \frac{}{3N} \quad ^2 1 \quad \frac{}{3N} \quad \frac{}{3N}$$

$$\frac{1}{2}\frac{3N}{2}^2 \quad \frac{}{N} \quad ^2 1 \quad \frac{}{3N} \quad \frac{}{N} \quad , \tag{26}$$

а также разложением $\sum_{n} \frac{2}{3N} n \quad \frac{3N}{2} \sum_{n} \mathrm{e}^{i(\quad)n3N}$, то соотношение (24) принимает следующий вид:

$$^{2}(t) \quad d \quad S_f(\quad) \; 1 \sum_{r\;0}^{N\;1} w_{0r}(t) \sum_{n} \; 1 \; 1 \; \frac{N}{} \; n \; \mathrm{e}^{i\frac{2}{3N}n(t \quad t_r)}$$

$$^{(0)} \quad \frac{2}{3N} n \quad i\frac{}{3N} g_{2r1} \quad ^{(1)} \quad \frac{2}{3N} n \quad \frac{}{3N}{}^{2} g_{2r2} \quad ^{(2)} \quad \frac{2}{3N} n$$

$$i \quad i \quad ^{(1)} \quad \frac{2}{3N} n \quad \frac{}{3N} g_{2r1} \quad ^{(2)} \quad \frac{2}{3N} n \quad \frac{{}^{2}}{2} \quad ^{(2)} \quad \frac{2}{3N} n \quad \Bigg|^{2}, \tag{27}$$

где $w_{0r}(t) \quad \prod_{\substack{k\;0 \\ k\;r}}^{N\;1} \dfrac{\sin^{3} \frac{}{3N}(t \quad t_k)}{\sin^{3} \frac{}{3N}(t_r \quad t_k)}$.

Преобразуя формулу (27), получим

$$^{2}(t) \quad d \quad S_f(\quad) \; 1 \sum_{r\;0}^{N\;1} w_{0r}(t) \sum_{n} P_r(t,n)$$

$$1 \quad \frac{2}{3N} n \quad \frac{}{3N} \quad \frac{2}{3N} n \quad \frac{}{3N} \quad \Bigg|^{2}, \tag{28}$$

где

$$P_r(t,n) \quad \mathrm{e}^{i\frac{2}{3N}(n \quad 1)(t \quad t_r)} \; \frac{1}{2} \; \frac{1}{2} \quad n \quad {}^{2} \quad \frac{1}{4} g_{2r2} \quad \frac{i}{2} g_{2r1} \; \frac{1}{2} \quad n$$

$$\mathrm{e}^{i\frac{2}{3N}n(t \quad t_r)} \; \frac{3}{4} \quad n^{2} \quad \frac{1}{2} g_{2r2} \quad i g_{2r1} n$$

$$\mathrm{e}^{i\frac{2}{3N}(n \quad 1)(t \quad t_r)} \; \frac{1}{2} \; \frac{1}{2} \quad n \quad {}^{2} \quad \frac{1}{4} g_{2r2} \quad \frac{i}{2} g_{2r1} \; \frac{1}{2} \quad n \quad . \tag{29}$$

После усреднения соотношения (28) по времени на периоде $3N$ придем к окончательному результату:

$$\left\langle {}^{2} \right\rangle \quad 2 \quad d \quad S_f(\quad) \quad 2 \sum_{n \; \frac{3N}{2}\;1} \int_{n\frac{2}{3N}\;\overline{3N}}^{n\overline{3N}\;\overline{3N}} d \quad S_f(\quad) \sum_{r\;0}^{N\;1} \sum_{p\;0}^{N\;1} \left\langle w_{0r}(t) w_{0p}(t) P_{rp}(t,n) \right\rangle, \tag{30}$$

где

$$P_{rp}(t,n)\quad P_r(t,n)P_p^*(t,n)\quad \cos\frac{2}{3N}n(t_p\quad t_r)[a(r)a(p)\quad b(r)b(p)]$$

$$\sin\frac{2}{3N}n(t_p\quad t_r)[a(r)b(p)\quad a(p)b(r)], \tag{31}$$

$$a(r)\quad \cos\frac{2}{3N}(t\quad t_r)\ \frac{1}{4}\quad n^2\quad \frac{1}{2}g_{2r2}\qquad \frac{3}{4}\quad n^2\quad \frac{1}{2}g_{2r2}\quad \frac{1}{2}g_{2r1}\sin\frac{2}{3N}(t\quad t_r),$$

$$b(r)\quad ng_{2r1}\cos\frac{2}{3N}(t\quad t_r)\quad n\sin\frac{2}{3N}(t\quad t_r)\quad ng_{2r1}.$$

Соотношение (30) определяет дисперсию ошибки реконструкции сигнала на частотах $|\quad|\quad /\ $.

ВЫВОДЫ

В данной работе на основании [1] получены теоремы отсчетов для двух случаев: 1) одновременной периодически неравномерной дискретизации сигнала и его первой производной; 2) одновременной периодически неравномерной дискретизации сигнала, его первой и второй производных. Кроме того, выведена формула для дисперсии реконструкции сигнала на частотах $|\quad|\quad /\ $.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yen J. L. On nonuniform sampling of bandwidth-limited signals // IRE Trans. on Circuit Theory. 1956. 3, N 4. P. 251.
2. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиотехнике, связи и оптике. М.: ГИФМЛ, 1962.
3. Ефимов В. М., Резник А. Л., Васьков С. Т. О дисперсии ошибки восстановления сигнала при дополнительном использовании отсчетов его производных // Автометрия. 2004. 40, № 6. С. 110.

Институт автоматики и электрометрии СО РАН,
E-mail: reznik@iae.nsk.su

Поступила в редакцию
23 мая 2005 г.