

# УРАВНЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО СЕЗОННОГО РЕЖИМА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КАК ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОЦЕССА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

*Н. А. Картвелишвили*

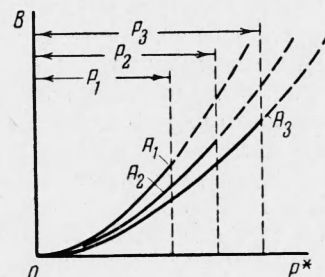
(Москва)

Исследования оптимальных сезонных режимов энергетических систем при описании естественного притока к водохранилищам ГЭС моделью марковского процесса с дискретным временем привели к созданию более или менее законченного в теоретическом отношении метода. Его основные положения изложены в [1], там же приведена библиография. Здесь рассматривается принципиальная сторона решения той же задачи для модели с непрерывным временем, полнее отражающей истинный характер процесса [2].

**1. Исходные положения.** Будем рассматривать энергетическую систему, состоящую из тепловых конденсационных электростанций и одной ГЭС, водохранилище которой, имеющее сезонное, годовое или многолетнее регулирование, выполняет только энергетические функции и является единственным на данной реке. Систему предполагаем концентрированной, т. е. будем считать, что потери в сетях могут быть учтены в графике нагрузки и что всегда возможна передача любому потребителю любой требуемой им мощности, даже при авариях на тех или иных линиях передачи.

В крупных системах обычно всегда имеется возможность при постепенном повышении нагрузки пустить агрегаты выключенного резерва раньше, чем будут использованы возможности загрузки вращающегося резерва. Поэтому здесь не делается различия между выключенным и вращающимся резервами. Предполагается также, что запасы топлива на тепловых электростанциях всегда пополняются заблаговременно, так что возможна неограниченно долгая работа этих станций с любой нагрузкой  $P^*$ , не превышающей их располагаемую мощность  $P$ . Суммарные затраты на топливо, расходуемое всеми тепловыми станциями в единицу времени  $B$ , можно, согласно [3], с достаточной точностью считать однозначной функцией  $P^*$  и  $P$ , как показано на фиг. 1. Кривые  $B = B(P^*, P)$  выходят из начала координат; это значит, что не учитываются затраты на топливо, расходуемое самым маломощным тепловым агрегатом при техническом минимуме его мощности. Отрицательная полуось абсцисс считается продолжением кривых  $B$  в зону отрицательных нагрузок. Будем также предполагать, что кривые  $B$  продолжаются правее точек  $A_i$  в зону  $P^* > P$  и притом так, что при  $P = \text{const}$  функция  $B(P^*, P)$  — гладкая и выпуклая при всех  $P^*$ .

Расходная характеристика ГЭС при напоре  $H = \text{const}$  представлена на фиг. 2, причем абсциссы точек  $A_1, A_2, \dots$  определяются не только располагаемой по генераторам мощностью  $N$ , но и напором (при низких напорах не всегда можно использовать всю располагаемую мощность генерато-



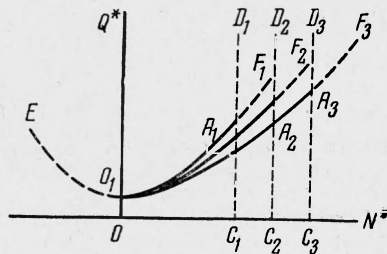
Фиг. 1

ров). Неустановившиеся процессы в бьефах ГЭС не учитываются, что позволяет считать напор  $H$  заранее заданной однозначной функцией полезного объема воды  $W$  в водохранилище и расхода турбин  $Q^* = Q - W$ , где  $Q$  — расход бытового притока к водохранилищу. В этих условиях расходные характеристики для  $H = \text{const}$  могут быть перестроены в характеристики для  $W = \text{const}$ , также имеющие вид, представленный на фиг. 2. Их набор для разных  $W$  определяет функцию  $N^* = N^*(Q^*, W, N)$ . Эти ха-

рактеристики предполагаются продолженными влево и вправо, как показано пунктиром на фиг. 2.

$$\begin{aligned} \text{Если } S \text{ — нагрузка системы, то} \\ B = B\{S - N^*(Q - W, W, N), P\} = \\ = B(W, W^*, Q, S, N, P) \end{aligned} \quad (1.1)$$

При этом убытки от перебоев энергоснабжения включаются в  $B$ . Перебой, устранение которого требует нарушения ограничения  $P^* \leq P$ , означает резкое возрастание  $B$  сверх затрат на фактически расходуемое топливо. Перебой, связанный с нехваткой воды, когда ГЭС работает на бы-



Фиг. 2

товом стоке ( $W=0$ ) при сработавшем водохранилище ( $W=0$ ), сводится к предыдущему случаю. Таким образом, продолжение кривых  $B$  правее точек  $A_i$  не есть искусственный прием, оно имеет определенный экономический смысл. Предположение же, что отрицательная полуось абсцисс на фиг. 1 также есть продолжение кривых  $B$ , исключает необходимость специального рассмотрения ограничения  $P^* \geq 0$ , но, очевидно, не может указать решение экономической задачи: работа в зоне  $P^* < 0$  означает ничем не компенсируемое нерациональное использование воды на ГЭС, которое, в конечном счете, всегда вызывает пережог топлива в другие периоды, поэтому при правильном решении такой режим исключается автоматически.

Нарушение ограничения  $N^* \leq N$  приведет к резкому возрастанию расхода турбин  $Q^*$  без заметного увеличения их мощности (пунктир правее точек  $A_i$  на фиг. 2), т. е. опять-таки к неэкономичному расходованию воды, нарушение же ограничения  $N^* \geq 0$  ведет к непосредственному пережогу топлива, т. е. тоже экономически невыгодно. Переход к действительной форме характеристик ГЭС будет осуществлен после получения решения.

В изложенной концепции убытки  $Y$  от перебоев энергоснабжения потребителей рассматриваются как функция одного лишь дефицита мощности  $D$ . В действительности размеры убытка  $Y$  в единицу времени зависят не только от дефицита мощности  $D$  в этот момент, но и от предыдущих значений  $D$ , скорости изменения дефицита и т. п. Иными словами,  $Y$  есть не функция, а достаточно сложный функционал  $D$ . Однако современная изученность убытков недостаточна для того, чтобы сказать об этом функционале что-либо определенное. Поэтому строить более сложные предположения о структуре зависимости  $Y$  от  $D$ , чем те, какие здесь сделаны, сейчас просто бесполезно. Но если бы функционал  $Y = Y(D)$  был точно известен, то это не потребовало бы принципиального изменения решения задачи.

**2. Характеристики случайных процессов.** Непрерывный случайный процесс речного стока  $Q = Q(t)$  может рассматриваться как марковский, в общем случае  $n$ -звенный. Этот процесс стохастически связан с другими случайными процессами (уровни в вышележащих створах, стокообразующие факторы, например, осадки, и т. п.), которые также можно считать  $n$ -звенными,  $\alpha = \alpha(t), \dots, \omega = \omega(t)$ . Вся эта совокупность случайных про-

цессов исчерпывающе характеризуется многомерной функцией распределения

$$F_n(t_1, Q_1; \dots; t_n, Q_n; \tau_1, \alpha_1; \dots; \tau_n, \alpha_n; \dots, \theta_1, \omega_1; \dots; \theta_n, \omega_n) \quad (2.1)$$

определяющей вероятность совместного осуществления неравенств

$$Q(t_i) < Q_i, \alpha(\tau_i) < \alpha_i, \dots, \omega(\theta_i) < \omega_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

(в общем случае функции  $Q, \alpha, \dots, \omega$ , или некоторые из них могут быть векторными).

Если  $F_n$  задана, то  $F_s$  для всех  $s \geq n$  и совместные функции распределения любых порядков функций  $Q, \alpha, \dots, \omega$  и любых других функций, которые определяются через эти функции (например, производных  $Q', \alpha', \dots, \omega'$ ), также заданы, ибо они определяются из  $F_n$  чисто математическими действиями без привлечения дополнительной информации о случайных процессах.

Положим  $t_1 = t, Q_1 = Q$  и будем считать, что все остальные моменты времени в (2.1), т. е.  $t_2, \dots, t_n, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots, \theta_1, \dots, \theta_n$ , предшествуют моменту  $t$  и что (из соображений, которые не определяются непосредственно свойствами рассматриваемых процессов, но учитывают эти свойства) установлено некоторое правило, согласно которому все эти моменты будут вполне определенными функциями  $t$ . Обозначим через  $x$  вектор с компонентами  $Q_2, \dots, Q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots, \omega_1, \dots, \omega_n$  и введем для (2.1) сокращенное обозначение  $F(t, Q, x)$ . Наряду с этой функцией в дальнейшем будут фигурировать условная функция распределения  $F(t, Q|x)$  и функция распределения  $F(t, x)$ . Здесь и в дальнейшем различие в составе и записи аргументов функций распределения означает и различие самих функций.

Процесс стока сам по себе вполне определяется заданием функции распределения  $F(t, Q, y)$ , где вектор  $y$  отличается от  $x$  тем, что компоненты  $y$  суть только часть компонентов  $x$ , а именно, расходы в моменты, предшествующие  $t$ . Переход от вектора  $y$  к вектору  $x$  связан не со свойствами случайного процесса  $Q(t)$  непосредственно, а с расширением возможностей прогнозирования стока. Элемент прогнозирования содержится уже в переходе от безусловной функции распределения  $F(t, Q)$  к условной  $F(t, Q|y)$ , т. е. в самой модели марковского процесса. Последующий переход от  $F(t, Q|y)$  к  $F(t, Q|x)$ , т. е. прогноз в прямом смысле слова, эффективен, если условная дисперсия  $Q$ , вычисленная по второй из этих функций, ощутимо меньше дисперсии, вычисленной по первой функции.

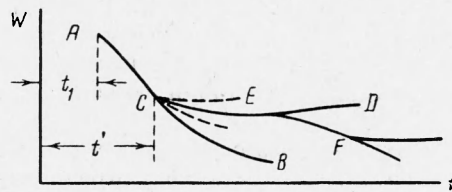
Сделанные предположения о функциях  $F(t, Q, x)$  или  $F(t, Q|x)$  требуют от практики гидрологического прогнозирования больше, чем она может дать в настоящее время. Гидрологический прогноз сейчас еще не выдается в виде условной функции распределения, а заключается в оценке очень немногих параметров условного распределения, например тех или иных пределов, в которых может заключаться прогнозируемая величина (большей частью без указания соответствующей вероятности), или математического ожидания и дисперсии, или только математического ожидания. Эта оценка относится не к мгновенным значениям расхода, а к его интегралам, т. е. к стокам за достаточно большие промежутки времени (месяц, сезон). Наконец, предположение, что все компоненты вектора  $x$  суть непрерывные случайные функции времени, также требует оговорки: в основу прогнозирования сейчас кладется не понятие случайной функции, а понятие случайной величины. Но эти несоответствия между предположениями теории и возможностями практики не препятствуют приложениям теории, а требуют только некоторого ее «огрубления». Вместе с тем, принятая модель выявляет роль гидрологических прогнозов в планировании оптимальных режимов более выпукло, чем это возможно в более узких рамках нынешних практических возможностей. Нужно учесть к тому же, что эти возможности непрерывно расширяются и разрыв между ними и принятой моделью сокращается. Некоторые гипотезы о структуре и соответствующие приемы построения функций  $F(t, Q, x)$  имеются в [4].

Случайный процесс  $S = S(t)$  исчерпывающе характеризуется функцией распределения  $F(t, S, \sigma)$ , где  $\sigma$  — некоторый вектор, аналогичный вектору  $y$ . Процесс  $S(t)$  практически непрерывен, поэтому он не может быть проще, чем однозвенный марковский процесс, т. е. вектор  $\sigma$  имеет по крайней мере один компонент — значение  $S$  в некоторый момент, предшествующий  $t$ .

Случайные процессы  $P(t)$  и  $N(t)$  могут рассматриваться как чисто разрывные процессы, характеризующиеся тем, что  $P$  и  $N$  могут меняться только скачками (выходит в аварийный ремонт или вступает в строй после ремонта сразу целый агрегат). Эти процессы управляются функциями

$$\begin{aligned} &\varphi(t, P) \text{ и } \varphi(t, N), \text{ определяющими} \\ &\text{вероятности } \varphi \Delta t \text{ скачка } P \text{ или } N \\ &\text{за время } \Delta t, \text{ и функциями} \\ &F[t, P(t+0) | P(t-0)] \\ &F[t, N(t+0) | N(t-0)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

распределения вероятностей  $P(t+0)$  и  $N(t+0)$  располагаемых мощностей после скачка при условии, что скачок произошел в



Фиг. 3

момент  $t$ , а до скачка эти мощности были равны  $P(t-0)$  и  $N(t-0)$ .

Описанная модель процессов  $P(t)$  и  $N(t)$  может быть уточнена учетом снижений располагаемой мощности от неаварийных причин (например, в результате зашлаковки котлов тепловых станций или заиливания канала деривационной ГЭС); тогда уже нельзя будет считать, что  $P$  и  $N$  постоянны в промежутках между скачками. Однако при нынешней слабой изученности процессов  $P$  и  $N$  нецелесообразно усложнять задачу учетом этого обстоятельства.

**3. Уравнение оптимального режима.** Оптимальным является режим, минимизирующий математическое ожидание  $MI$  издержек  $I$  по системе за некоторое достаточно большое время  $t_2 - t_1$ , начиная с текущего момента  $t_1$ , причем в частном случае может быть  $t_2 = \infty$ .

Величина  $MI$  выражается так

$$MI = M \int_{t_1}^{t_2} e^{-p(t-t_1)} B(W, W', Q, S, P, N) dt \quad (3.1)$$

Здесь  $p$  — множитель, учитывающий эффект разновременности затрат, а управляющей функцией будет наполнение водохранилища  $W = W(t)$ .

Учитывая обстановку, сложившуюся к текущему моменту  $t_1$ , в частности наличные прогнозы (т. е. компоненты вектора  $x$ ), можно выбрать такую кривую  $W(t)$ , которая, удовлетворяя при  $t = t_1$  и  $t = t_2$  соответствующим краевым условиям, минимизирует  $MI$ . Проработав по этой кривой ( $AB$  на фиг. 3) до некоторого момента  $t'$  и учитывая, что к этому моменту появляются новые прогнозы и выявляется новая обстановка, нетрудно видеть, что для минимизации математического ожидания издержек за оставшееся время  $t_2 - t'$  нужно продолжать движение не по  $CB$ , а по какой-то другой кривой  $CD$ . Другими словами, в точке  $C$  режим корректируется. Следующие такие корректировки будут в точках  $E$ ,  $F$  и т. д., причем теоретически время между соседними корректировками должно быть бесконечно малым. Информация в момент  $t_1$  о предстоящей корректировке режима в момент  $t'$  состоит только в том, что корректировка будет выполняться с учетом всей обстановки, в том числе — значений компонентов  $x$  и  $\sigma$ , для которых в момент  $t$  известны только функции распределения вероятностей  $F(t, x)$  и  $F(t, \sigma)$ . Различным значениям  $x$  и  $\sigma$  соответствуют различные кривые  $CE$ , причем, делая выбор в момент  $t_1$ , нужно брать ту из них, которой отвечает минимум издержек, взвешенных по вероятности  $x$ .

и  $\sigma$ . Таким образом, экстремаль, отыскиваемая в момент  $t_1$ , есть не фактическая кривая режима водохранилища, а лишь некоторая функция времени  $W(t)$ , минимизирующая (3.1), производная которой при  $t = t_1$  показывает наивыгоднейшую скорость сработки (наполнения) водохранилища в этот момент. Первая вариация издержек (3.1) определяется выражением

$$\begin{aligned} \delta MI = M \delta I = M \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial W} [e^{-p(t-t_1)} B] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial W} [e^{-p(t-t_1)} B] \right\} \delta W dt + \\ + e^{-p(t_2-t_1)} M \left\{ \frac{\partial B}{\partial W} \delta W + \left( B - W \frac{\partial B}{\partial W} \right) \delta t \right\}_{t=t_2} - \\ - M \left\{ \frac{\partial B}{\partial W} \delta W + \left( B - W \frac{\partial B}{\partial W} \right) \delta t \right\}_{t=t_1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Символ  $M$  здесь нужно понимать как символ безусловного математического ожидания или, точнее, математического ожидания, условного только по отношению к обстановке в момент  $t_1$ . Первому члену (3.2) можно придать вид

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ e^{-p(t-t_1)} \frac{\partial MB}{\partial W} - \frac{\partial}{\partial W} M \frac{d}{dt} [e^{-p(t-t_1)} B] \right\} \delta W dt \quad (3.3)$$

Здесь

$$MB = \iiint B dF(t, Q) dF(t, S) dF(t, P) dF(t, N) \quad (3.4)$$

В силу сказанного о корректировке режима символ  $M$  нельзя внести под знак производной по  $t$  даже в том случае, когда возможности специального прогнозирования не используются и имеется в виду вектор  $y$ , а не  $x$ . Однако, во всех случаях можно написать

$$M \frac{d}{dt} [e^{-p(t-t_1)} B] = M \frac{d}{dt} [e^{-p(t-t_1)} M_+ B] = e^{-p(t-t_1)} \left( -pMB + M \frac{dM_+ B}{dt} \right)$$

где

$$M_+ B = \iiint B dF(t, Q|x) dF(t, S|\sigma) dF(t, P) dF(t, N)$$

есть математическое ожидание  $B$ , условное по отношению к обстановке в момент  $t$ . Из (3.3) и (3.5) следует уравнение экстремали

$$\frac{\partial MB}{\partial W} + p \frac{\partial MB}{\partial W} - \frac{\partial}{\partial W} M \frac{dM_+ B}{dt} = 0 \quad (3.6)$$

в котором

$$\begin{aligned} \frac{dM_+ B}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_+ [B(+t+0) - B(t-0)]}{\Delta t} + \frac{\partial M_+ B}{\partial t} + \\ + \frac{\partial M_+ B}{\partial W} W + \frac{\partial M_+ B}{\partial W} W'' + \frac{\partial M_+ B}{\partial x} x + \frac{\partial M_+ B}{\partial \sigma} \sigma \end{aligned} \quad (3.7)$$

причем первый член правой части есть компонент производной, обусловленный возможным скачком  $P$  или  $N$  в момент  $t$ . Из (3.6) и (3.7) получается уравнение экстремали в окончательном виде

$$Y_0 W'' - Y_1 W' + X = 0 \quad (3.8)$$

$$X = Y_2 - pY_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7$$

$$Y_i = \iiint \rho_i dF(t, Q) dF(t, S) dF(t, P) dF(t, N) \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

$$\rho_0 = \frac{\beta}{q^2} - b\kappa, \quad \rho_1 = \frac{\beta n}{q} - bv, \quad \rho_2 = bn, \quad \rho_3 = \frac{b}{q}$$



$$\begin{aligned}
 b &= \frac{\partial}{\partial P^*} B(P^*, P), & q &= \left\{ \frac{\partial}{\partial Q^*} N^*(Q^*, W, N) \right\}^{-1} \\
 n &= \frac{\partial}{\partial W} N^*(Q^*, W, N), & \beta &= \frac{\partial b}{\partial P^*} = \frac{\partial^2}{\partial P^{*2}} B(P^*, P) \\
 v &= \frac{\partial^2}{\partial Q^* \partial W} N^*(Q^*, W, N), & \kappa &= \frac{\partial^2}{\partial Q^{*2}} N^*(Q^*, W, N) \\
 Y_4 &= M \frac{\partial^2 M_{+B}}{\partial W \partial x} x = \iiint \frac{b}{q} \frac{\partial}{\partial x} f(t, Q|x) f(x, x') x' \times \\
 &\quad \times dQ dF(t, S) dF(t, P) dF(t, N) dx dx' \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_5 &= M \frac{\partial^2 M_{+B}}{\partial W \partial \sigma} \sigma = \iiint \frac{b}{q} \frac{\partial}{\partial \sigma} f(t, S|\sigma) f(\sigma, \sigma') \sigma' \times \\
 &\quad \times dS dF(t, Q) dF(t, P) dF(t, N) d\sigma d\sigma' \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_6 &= M \frac{\partial^2 M_{+B}}{\partial t \partial W} = \iiint \frac{b}{q} dQ dS \left\{ [f(t, S) \int \frac{\partial}{\partial t} f(t, Q|x) dF(t, x) + \right. \\
 &\quad + f(t, Q) \int \frac{\partial}{\partial t} f(t, S|\sigma) dF(t, \sigma) dF(t, P) dF(t, N) + \\
 &\quad \left. + f(t, Q) f(t, S) \left[ d \frac{\partial F(t, P)}{\partial t} dF(t, N) + d \frac{\partial F(t, N)}{\partial t} dF(t, P) \right] \right\} \\
 Y_7 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial W} \frac{M[B(t+0) - B(t-0)]}{\Delta t} \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Здесь буквой  $f$  обозначены соответствующие плотности распределения, а символ  $d$  всегда относится только к случайной переменной.

Определим  $Y_7$ . За время  $\Delta t$  могут произойти четыре несовместимых события:

- 1) с вероятностью  $\varphi_P \varphi_N \Delta t^2 + O(\Delta t^2)$  и  $P$  и  $N$  сделают скачки,
- 2) с вероятностью  $\varphi_P \Delta t + O(\Delta t)$  величина  $P$  сделает скачок, а  $N$  — не делает,
- 3) с вероятностью  $\varphi_N \Delta t + O(\Delta t)$  величина  $N$  сделает скачок, а  $P$  — не делает,
- 4) с вероятностью  $1 - (\varphi_P + \varphi_N) \Delta t + O(\Delta t)$  ни  $P$ , ни  $N$  скачка не делают.

В результате, при фиксированных  $Q, S, P(t-0) = P$  и  $N(t-0) = N$  и при условии, что после скачков, если они произойдут, располагаемые мощности примут значения  $P(t+0) = P^+$  и  $N(t+0) = N^+$ , математическое ожидание разности  $B(t+0) - B(t-0)$  будет  $\xi \Delta t + O(\Delta t)$ , где

$$\begin{aligned}
 \xi &= \{B[S - N^*(Q - W, W, N), P^+] - \\
 &\quad - B[S - N^*(Q - W, W, N), P]\} \varphi(t, P) + \\
 &\quad + \{B[S - N^*(Q - W, W, N^+), P] - \\
 &\quad - B[S - N^*(Q - W, W, N), P]\} \varphi(t, N) \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 Y_7 &= \iiint dF(t, Q) dF(t, S) dF(t, P) dF(t, N) \times \\
 &\quad \times \left\{ \int \frac{b[S - N^*(Q - W, W, N), P^+]}{q(Q - W, W, N)} \varphi(t, P) dF(t, P^+|P) + \right. \\
 &\quad + \int \frac{b[S - N^*(Q - W, W, N^+), P]}{q(Q - W, W, N^+)} \varphi(t, N) dF(t, N^+|N) - \\
 &\quad \left. - \frac{b[S - N^*(Q - W, W, N), P]}{q(Q - W, W, N)} [\varphi(t, P) + \varphi(t, N)] \right\} \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Высокая кратность интегралов в формулах для  $Y_i$ , связанная с одновременным учетом четырех случайных процессов, приводит к достаточно сложным специфическим задачам программирования решения, но при современном уровне развития вычислительной математики не может служить препятствием для практического выполнения расчетов оптимальных режимов. Нетрудно проследить, что если решать задачу о сезонном режиме без учета случайных колебаний нагрузок и возможности аварий оборудования, т. е. учитывать как случайный фактор только речной сток (что обычно и делается), рассматривая его как однозвенный марковский процесс, то наивысшая кратность интегралов в предыдущих формулах снизится до трех.

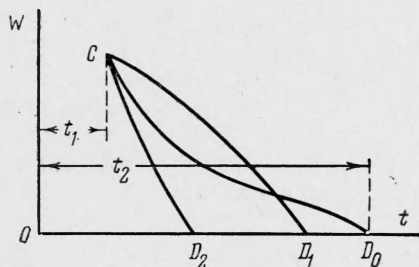
**4. Краевые условия.** Если при  $t = \tau$  экстремаль выходит на отметку мертвого объема, то при  $t = \tau - 0$  и  $t = \tau + 0$  издержки в единицу времени составят

$$\begin{aligned} B(\tau - 0) &= B\{S - N^*(Q - W, 0, N), P\}, \\ B(\tau + 0) &= B\{S - N^*(Q, 0, N), P\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

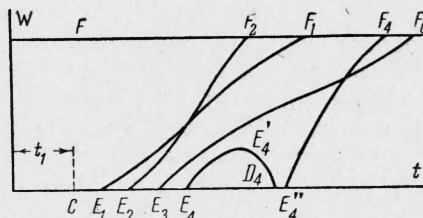
Из (3.2) вытекает следующее условие трансверсальности, определяющее оптимальное значение  $\tau$ :

$$MB(\tau - 0) - WY_3(\tau - 0) = MB(\tau + 0) \quad (4.2)$$

Совершенно аналогичное условие должно выполняться и в том случае, если  $\tau$  есть момент выхода на отметку нормального подпора ( $W = W_m$ ).



Фиг. 4



Фиг. 5

Если же  $\theta$  есть момент начала наполнения или сработки водохранилища, то условие трансверсальности аналогично условию (4.2)

$$MB(\theta + 0) - WY_3(\theta + 0) = MB(\theta - 0) \quad (4.3)$$

Уравнение (4.2) ставит (фиг. 4) в соответствие каждому  $\tau$  определенное  $W$ . Среди экстремалей, проходящих через данную точку  $C$ , будет конечное число пересекающих ось абсцисс на фиг. 4 со значением  $W$ , удовлетворяющим условию (4.2). Пусть  $D_0$  — самая правая точка такого пересечения. Абсолютный минимум  $MI$  за время от  $t_1$  до  $t_2$  дает один из путей  $CD_iD_0$ , независимо от величины  $MI$  после  $t_2$ .

Если при  $t = t_1$  водохранилище сработано (фиг. 5), то каждому  $\theta > t_1$  и каждому  $\tau$  соответствуют определенные  $W$ , удовлетворяющие условию (4.3) и условию (4.2) при выходе на отметку подпора, т. е. на линию  $FF_i$ . Среди экстремалей будет конечное число удовлетворяющих условиям (4.2) и (4.3) одновременно. Если  $F_0$  — самая правая точка выхода на отметку нормального подпора, то абсолютный минимум  $MI$  за время  $t_1 \leq t \leq t_2$  даст одна из экстремалей  $CE_iF_iF_0$ . Возможны, конечно, и более сложные случаи, например, когда путь, реализующий абсолютный минимум  $MI$ , имеет вид  $CE_4E_4'D_4E_4''F_4$ .

При большом водохранилище может оказаться, что уравнения (4.2) и (4.3) не дают вещественных  $W$  ни при каких  $\tau$  и  $\theta$ . В этом случае в (3.2) следует положить  $t_2 \rightarrow \infty$ . Так как  $\delta W = \delta t = 0$  при  $t = t_1$ , то в правой части (3.2) отличаться от нуля может только первый член.

В этом случае необходимо построить несколько экстремалей, задаваясь различными  $W(t_1)$ , и найти ту, которая дает минимум величине (3.4), всегда конечной из-за наличия экспоненциального множителя.

Рассмотренные краевые условия отвечают эксплуатационной ситуации. Решение режимной задачи в проектной ситуации связано с необходимостью определения зависимости от режима части издержек по системе для каждого варианта проекта. Постановка этой задачи может быть очень разнообразна, в зависимости от стадии проектирования и от того, какой конкретный вопрос решается проектом. Может, например, возникнуть необходимость даже в определении математического ожидания издержек по годам, в процессе наполнения водохранилища. Такого рода задачи не вызывают принципиальных затруднений и рассматривать их здесь нет необходимости. Некоторую особенность представляет случай, когда требуется определить математическое ожидание годовых издержек при статистически установившемся режиме работы водохранилища ГЭС. В этой задаче предполагается, что график нагрузки системы периодически повторяется от года к году, т. е. что прирост нагрузок и введение новых тепловых мощностей для их покрытия не отражаются на работе ГЭС, и принимается  $p = 0$ . Искомые годовые издержки будут определяться экстремалью, удовлетворяющей условиям трансверсальности (4.2) и (4.3), если они дают вещественные  $W^*$ , и условие периодичности  $W(t) = W(t - T)$ , в котором  $T =$  одному году.

**5. Усреднение уравнений по времени.** В коэффициенты уравнения (3.8) входят функции распределения вероятностей переменных с резко различным темпом изменения: в изменчивости расходов  $Q$  большей частью четко выражен только годичный цикл, в то время как в изменчивости нагрузок  $S$  не менее существенны суточный и недельный циклы. Это создаст большие неудобства для практического интегрирования этого уравнения. Более удобным, чем непосредственное интегрирование, может оказаться выделение анализа быстрых и медленных процессов в самостоятельные задачи.

Рассмотрим интервал времени  $\Delta t$  такой длительности (неделя, декада), чтобы можно было считать постоянным расход  $Q$  и пренебрегать изменением  $W$  в пределах интервала. Уравнению (3.8) в пределах этого интервала можно придать вид

$$Y_0 Q^{**} - Y_1 Q^* + (Y_1 Q - X) = 0 \quad (5.1)$$

причем

$$Y_4 = 0 \quad Y_6 = \iiint \frac{b}{q} dS \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(t, S | \sigma) dF(t, \sigma) dF(t, P) dF(t, N) + \right. \\ \left. + f(t, S) \left[ d \frac{\partial F(t, P)}{\partial t} dF(t, N) + d \frac{\partial F(t, N)}{\partial t} dF(t, P) \right] \right\} \quad (5.2)$$

а остальные  $Y_i$  определяются по формулам (3.9), (3.11), (3.14), в которых нужно сократить кратность интегралов на одну единицу и вычеркнуть из подынтегральных выражений множитель  $dF(t, Q)$ .

Если же считать случайным фактором только речной сток, как об этом уже говорилось выше, то режим в пределах интервала  $\Delta t$  будет определяться не уравнением (5.1), а значительно более простыми зависимостями, рассматриваемыми, например, в [3], в основе которых лежат детерминистические, а не вероятностные представления.

Исходя из этих зависимостей, или в результате интегрирования (5.1) при различных начальных значениях  $Q^*$ , получим семейство кривых  $Q^* = Q^*(t)$ , каждой из которых соответствует определенный средний за время  $\Delta t$  расход турбин, т. е. средняя скорость  $W^*$  изменения  $W$ . С другой стороны, каждой такой кривой останется в соответствие величина  $Z$  — среднее за время  $\Delta t$  значение условного по отношению к  $Q$  математического ожидания  $B$

$$Z = Z(t, Q, W, W^*) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} dt' \int_0^\infty B dF(t', S) \int_0^\infty dF(t', P) \int_0^\infty dF(t', N) \quad (5.3)$$



Величина  $MI$  в (3.4) не изменится, если в эту формулу подставить  $Z$  вместо  $B$ , в уравнение экстремали, вместо (3.6), будет

$$\frac{\partial MZ}{\partial W} + p \frac{\partial MZ}{\partial W} - \frac{\partial}{\partial W} M \frac{dM+Z}{dt} = 0$$

или в развернутом виде

$$U_0 W'' + U_1 W' + U_2 = 0 \quad (5.4)$$

$$U_0 = \int \frac{\partial^2 Z}{\partial W^2} dF(t, Q), \quad U_1 = \int \frac{\partial^2 Z}{\partial W \partial W} dF(t, Q)$$

$$U_2 = \int \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial t \partial W} - \frac{\partial Z}{\partial W} - p \frac{\partial Z}{\partial W} \right) dF(t, Q) + \\ + \iint \frac{\partial Z}{\partial W} d \frac{\partial F(t, Q | x)}{\partial t} dF(t, x) + \iiint \frac{\partial Z}{\partial W} d \frac{\partial F(t, Q | x)}{\partial x} x f(x, x') dx dx'$$

При этом  $U_0$ ,  $U_1$  и  $U_2$  зависят только от  $t$ ,  $W$  и  $W'$ , а  $W$  и  $W'$  суть уже не мгновенные, а скользящие средние (с интервалом усреднения  $\Delta t$ ) значения наполнения водохранилища  $W$  и скорости его изменения.

Краевые условия при выходе на граничные уровни водохранилища аналогичны условиям (4.2) и (4.3)

$$MZ(\tau - 0) - W' \frac{\partial}{\partial W} MZ(\tau - 0) = MZ(\tau + 0) \quad (5.5)$$

$$MZ(\theta + 0) - W' \frac{\partial}{\partial W} MZ(\theta + 0) = MZ(\theta - 0) \quad (5.6)$$

Управление режимом может строиться в два этапа.

1. Определение  $W'$  в момент корректировки режима интегрированием (5.4) при соответствующих краевых условиях. Интервалы между корректировками режима теоретически и здесь должны быть бесконечно малыми, но практически они могут приниматься равными  $\Delta t$  (но, конечно, корректировка требуется и при всяком резком изменении обстановки, например, после аварии крупного агрегата). Каждая корректировка определяет объем воды, подлежащий пропуску через турбины ГЭС за время  $\Delta t$ .

2. Распределение нагрузки между станциями системы внутри интервала  $\Delta t$  с учетом полного использования указанного объема воды по уравнению (5.1) или другими способами, обеспечивающими более детальный учет особенностей краткосрочных режимов.

Вернемся к форме характеристик на фиг. 2. Чтобы учесть реальное ограничение мощности ГЭС, следует представить себе, что кривые  $A_i F_i$  в пределе сливаются с прямыми  $A_i D_i$ . Тогда на этих кривых в пределе будет  $\partial N^* / \partial Q^* = 0$ , т. е.  $1/q = v = \kappa = 0$  (но  $n$  может сохранять отличное от нуля конечное значение), что и нужно учитывать при вычислениях по формулам (3.9) и следующим. Эти же условия должны выполняться и на кривой  $Q_1 E$ , которая в пределе сливается с осью ординат.

Поступила 8 VIII 1963

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цветков Е. В. Эксплуатационные и проектные задачи регулирования речного стока. Проблемы гидроэнергетики и водного хозяйства, вып. 1, Изд. АН КазССР, Алма-Ата, 1963.
2. Картвелишвили Н. А. О применении теории вероятностных процессов в гидроэнергетике. ПМТФ, 1963, № 4.
3. Горнштейн В. М. Наивыгоднейший режим работы гидростанций в энергосистемах. Госэнергоиздат, 1959.
4. Картвелишвили Н. А. Гидрологические основы вероятностной теории режимов энергетических систем. Тр. ВНИИЭ, вып. 13, Госэнергоиздат, 1961