РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2014 № 3

УДК 539.37; 622.83

О КРИТЕРИЯХ РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД, ОСНОВАННЫХ НА НОВОЙ СИСТЕМЕ ИНВАРИАНТОВ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

А. Ф. Ревуженко

*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,
Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*

Инварианты тензора напряжений определяются как средние значения напряжений, действующих на всевозможных площадках элементарного объема тела. Интегрирование напряжений производится в плоскости диаграммы Мора. Полученные инварианты могут быть использованы при формулировке критериев предельного состояния (разрушения) геоматериалов.

Горная порода, тензор напряжений, деформации, инварианты, прочность, критерии

Одно из основных свойств горных пород, грунтов и сыпучих материалов заключается в том, что при определенных внешних нагрузках они переходят в предельное состояние. В предельном состоянии деформации тела становятся прогрессирующими и могут развиваться неограниченно. В некоторых случаях достижение предельного состояния означает исчерпание несущей способности и может рассматриваться как разрушение. В других случаях предельное состояние материала — это только одна из стадий его деформирования. Вопрос о критериях разрушения или перехода в предельное состояние является весьма важным и имеет богатую историю, восходящую к трудам Галилея. К настоящему времени разработан ряд критериев и соответствующих теорий. Однако, учитывая большое разнообразие геоматериалов и способов их нагружения, сказать, что вопрос о критериях полностью решен — нельзя. Работы в данном направлении продолжаются как в области эксперимента, так и в теоретическом плане [1, 2].

Предположим, что история нагружения материала в допредельном состоянии на критерий разрушения не влияет. Тогда критерий можно свести к условию $f = 0$, где функция f зависит от достигнутых напряжений и деформаций. В аргументы функции могут входить также поровое давление и внутренние переменные. Рассмотрим общие требования на характер зависимости функции f от напряжений и деформаций. Для определенности будем говорить только о напряжениях. Для деформационных критериев результаты будут аналогичными. Остановимся на случае изотропного материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-05-00432).

Поскольку материал предполагается изотропным, то критерий должен формулироваться относительно инвариантов тензора напряжений. У симметричного тензора второго ранга независимых инвариантов, как известно, три. Но если говорить о критериях, то удобнее считать, что инвариантов неограниченно много, так как любая комбинация независимых инвариантов дает новый инвариант. Вопрос о том, относительно каких именно инвариантов должен формулироваться критерий, является далеко не тривиальным. Из общих соображений ясно, что желательно иметь дело с инвариантами, которые имели бы вполне определенный и ясный механический смысл.

Исходные инварианты тензора напряжений (первый, второй и третий) — это коэффициенты характеристического уравнения

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0,$$

где λ — одно из главных напряжений, $\sigma_3 \le \sigma_2 \le \sigma_1$,

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$
$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \qquad (1)$$
$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Для вывода характеристического уравнения есть однозначный алгоритм, поэтому выражения (1) для исходных инвариантов определяются однозначно и никаких альтернатив нет. В то же время для конструирования новых инвариантов, которым можно придать тот или иной смысл, алгоритма не существует. Здесь возможны различные подходы, которые приводят к различным результатам.

В теориях прочности чаще всего используются инварианты, введенные А. Надаи:

$$\sigma = \sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3},$$
$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}, \qquad (2)$$

а также безразмерный инвариант

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

— параметр Лоде – Надаи [3].

Величины $\sigma_{\text{окт}}$ и $\tau_{\text{окт}}$ равны нормальным и касательным напряжениям, действующим на октаэдрических площадках. Кроме того, величина $\tau_{\text{окт}}$ пропорциональна (но не совпадает с ней) среднему квадратичному значению касательных напряжений, действующих на поверхности сферы, выделенной в элементарном объеме с напряжениями σ_1, σ_2, σ_3 [4]. Из формул (2) также видно, что инвариант σ характеризует среднее нормальное напряжение в смысле среднеарифметического по трем площадкам экстремальных нормальных напряжений, а $\tau_{\text{окт}}$ — среднее касательное напряжение в смысле среднего квадратичного по трем площадкам экстремальных касательных напряжений.

Представляет интерес определение средних напряжений не только по экстремальным площадкам, но и по площадкам, на которых реализуются все промежуточные значения напряжений, т. е. по всем площадкам элементарного объема тела. Кроме того, для геоматериалов имеют значения не только сами напряжения, но и отношения касательных напряжений к нормальным. Ясно, что все характеристики, которые могут быть получены на этом пути, будут представлять собой некоторые инварианты тензора напряжений.

Вопрос об инвариантах является одним из самых фундаментальных в теории и может показаться, что он исследован исчерпывающим образом. Однако при изменении процедуры осреднения появляются альтернативные возможности и пути для дальнейших исследований. Пусть по-прежнему σ_1, σ_2, σ_3 — главные напряжения. Возьмем некоторую площадку с нормалью $\bar{n}$. Тогда нормальное σ_n и касательное τ_n напряжения на площадке вычисляются по формуле Коши. Всевозможные значения $(\sigma_n,\ \tau_n)$ целиком заполняют плоскую область, ограниченную тремя кругами Мора (рис. 1, заштрихованная область).

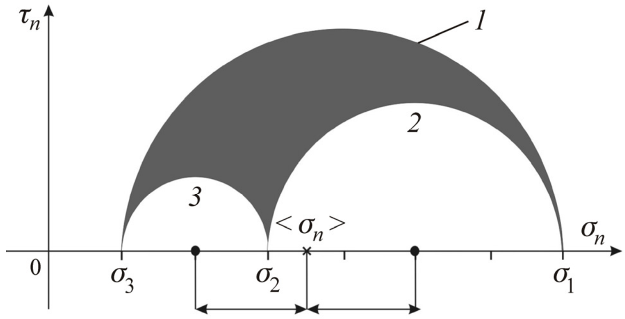

Рис. 1.

Основная идея настоящей работы состоит в том, чтобы средние значения нормальных, касательных напряжений и любых их комбинаций определять путем интегрирования по области всевозможных значений $(\sigma_n,\ \tau_n)$, т. е. по области, ограниченной тремя окружностями Мора. Эта практически очевидная посылка приводит к новым инвариантам, которые по своему построению имеют ясный механический смысл и принципиально отличаются от известных инвариантов типа (1) и (2).

Таким образом, в данной работе речь идет не столько о конкретных критериях предельного состояния (разрушения), сколько о расширении арсенала средств, который может быть использован для формулировки тех или иных критериев.

ИНТЕНСИВНОСТЬ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Среднюю величину нормальных напряжений определим следующим образом:

$$\langle \sigma_n \rangle = \frac{1}{S} \iint_S \sigma_n dS\,, \quad dS = d\sigma_n d\tau_n\,, \tag{3}$$

где S — область, ограниченная кругами Мора (см. рис. 1). Интегралы удобнее подсчитывать в полярных координатах, показанных на рис. 2. Площадь полукруга радиуса R равна $\pi R^2/2$. Отсюда

$$S = \frac{\pi}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)\,. \tag{4}$$

Интеграл по полукругу S_R радиуса R равен

$$\iint_{S_R} \sigma_{nn} dS_R = \int_0^R dr \int_0^\pi (a - r\cos\vartheta) r d\vartheta = \frac{\pi R^2}{2} a\,. \tag{5}$$

Для первого, второго и третьего кругов Мора имеем соответственно (см. рис. 1):

$$a = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2};$$
$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}. \tag{6}$$

Подставляя значения (6) в (5) и затем в (3), получим

$$\langle \sigma_n \rangle = \frac{\dfrac{\pi}{2}\left[\dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\left(\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 - \dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\left(\dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2\right]}{\dfrac{\pi}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)}. \tag{7}$$

В этой форме записи каждое из слагаемых имеет ясный смысл. Во-первых, в знаменателе стоит площадь, ограниченная тремя кругами Мора, — формула (4). Это нормирующий член. Далее, первое слагаемое числителя (с множителем $\pi/2$) — это интеграл от σ_n по большому кругу Мора, два другие слагаемые — это интегралы по 2-му и 3-му кругам Мора.

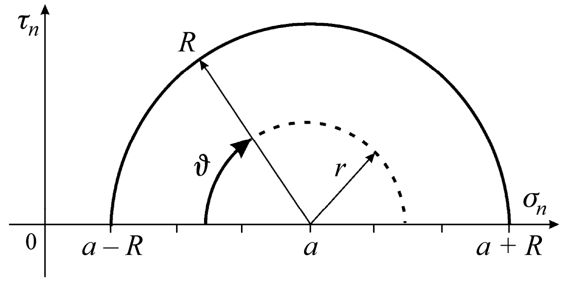

Рис. 2.

Выражение (7) можно преобразовать к следующему виду:

$$\langle \sigma_n \rangle = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right). \tag{8}$$

Результат (8) является совершенно неожиданным. Во-первых, он не совпадает с общепринятым гидростатическим давлением σ. В выражении для σ все напряжения входят симметричным образом, а в выражении для $\langle \sigma_n \rangle$ промежуточное напряжение σ_2 входит несимметрично с σ_1 и σ_2. Очевидно, что $\sigma = \langle \sigma_n \rangle$ только при $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, так как

$$\langle \sigma_n \rangle - \sigma = \frac{1}{6}\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right).$$

Тем не менее обе меры средней величины нормальных напряжений удовлетворяют условию согласованности, а именно, если напряженное состояние стремится к гидростатическому сжатию

$$\sigma_1 \to p, \quad \sigma_2 \to p, \quad \sigma_3 \to p, \quad \text{то } \langle \sigma_n \rangle \to p \text{ и } \sigma \to p.$$

Особый интерес представляет другой крайний случай — испытание в одометре, когда два главных напряжения совпадают между собой. Инвариант σ эти случаи не различает между собой: если $\sigma_2 = \sigma_3 = p$, $\sigma_1 > p$, то

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + 2p}{3}, \tag{9}$$

если же $\sigma_1 = \sigma_2 = p$, $\sigma_3 < 0$, то, как и в (9),

$$\sigma = \frac{\sigma_3 + 2p}{3} .$$

Новый инвариант также не различает эти случаи: если $\sigma_2 = \sigma_3 = p$, $\sigma_1 > 0$, то

$$\langle \sigma_n \rangle = \frac{\sigma_1 + 3p}{4} ,$$

если же $\sigma_1 = \sigma_2 = p$, $\sigma_1 > 0$, то

$$\langle \sigma_n \rangle = \frac{\sigma_3 + 3p}{4} .$$

Роль самого бокового сжатия p в обоих случаях различна. В выражении для σ значение p входит с коэффициентом $2/3$, а в $\langle \sigma_n \rangle$ — с коэффициентом $3/4$.

СРЕДНЕЕ ПО ДИАГРАММЕ МОРА КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Определим его как

$$\langle \tau_n \rangle = \frac{1}{S} \iint_S \tau_n dS . \tag{10}$$

Интеграл по полукругу S_R (см. рис. 2) равен

$$\iint_{S_R} \tau_n dS_n = \int_0^R dr \int_0^\pi r \sin \vartheta \, r d\vartheta = \frac{2R^3}{3} . \tag{11}$$

Используя (6) и (7), получим

$$\langle \tau_n \rangle = \frac{\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^3 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^3 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^3 \right]}{\frac{\pi}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)} .$$

В данном выражении для среднего касательного напряжения каждый член (как и в (7)) имеет ясный смысл. Знаменатель — это нормирующий член, а каждое из слагаемых числителя — вклад каждого из трех кругов Мора в среднее касательное напряжение. Естественно, что во все члены, кроме первого в числителе, входит промежуточное главное напряжение σ_2 . Тем интереснее отметить, что после проведения всех выкладок величина σ_2 из окончательного результата исключается. Окончательный результат имеет вид

$$\langle \tau_n \rangle = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} . \tag{12}$$

Таким образом, среднее касательное напряжение с точностью до множителя $2/\pi$ совпало с максимальным касательным напряжением. В этом отношении данный результат близок к (2): октаэдрическое касательное напряжение пропорционально максимальному касательному напряжению с коэффициентом из диапазона (0.816; 0.941) [5]. Следовательно, здесь наблюдается слабая зависимость от σ_2 , в то время как формула (12) указывает на полное отсутствие данной зависимости.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ИНВАРИАНТ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Все геоматериалы обладают свойством внутреннего трения. Коэффициент внутреннего трения на площадке $\bar{n}$ связан с отношением напряжений τ_n / σ_n. Предположим, что все главные напряжения являются сжимающими.

Подсчитаем среднее значение τ_n / σ_n по области, ограниченной кругами Мора:

$$\left\langle \frac{\tau_n}{\sigma_n} \right\rangle = \frac{1}{S} \iint_S \frac{\tau_n}{\sigma_n} dS . \tag{13}$$

Интеграл по одному полукругу S_R равен

$$\int_0^R dr \int_0^\pi \frac{r \sin \vartheta}{a - r\cos\vartheta} r d\vartheta = aR - \frac{a^2 - R^2}{2} \ln\left|\frac{a+R}{a-R}\right| . \tag{14}$$

Применяя данную формулу для каждого из трех кругов Мора (6), после несложных преобразований получим

$$\left\langle \frac{\tau_n}{\sigma_n} \right\rangle = \frac{\dfrac{1}{2}\left[\sigma_1\sigma_2 \ln\left|\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\right| + \sigma_2\sigma_3 \ln\left|\dfrac{\sigma_2}{\sigma_3}\right| - \sigma_1\sigma_3 \ln\left|\dfrac{\sigma_1}{\sigma_3}\right|\right]}{\dfrac{\pi}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)} . \tag{15}$$

Выберем любой удобный масштаб σ^0 и перейдем к безразмерным параметрам $\bar{\sigma}_i = \sigma_i / \sigma^0$, $i = 1, 2, 3$. В этом случае выражение (15) можно преобразовать к виду

$$\left\langle \frac{\tau_n}{\sigma_n} \right\rangle = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\bar{\sigma}_1 \ln|\bar{\sigma}_1| - \bar{\sigma}_2 \ln|\bar{\sigma}_2|}{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2} - \frac{\bar{\sigma}_2 \ln|\bar{\sigma}_2| - \bar{\sigma}_3 \ln|\bar{\sigma}_3|}{\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3}\right]. \tag{16}$$

Справа стоит инвариант тензора напряжений, который естественно назвать логарифмическим инвариантом. Его структура очень интересна. Видно, что он полностью определяется функцией $y = x\ln(x)$: инвариант равен разности двух секущих модулей данной функции.

Структура (16) также интересна с точки зрения анализа размерностей. В прикладной математике и физике проводятся вычисления как с безразмерными, так и с размерными величинами. Причем размерности последних представляют собой только произведения степеней основных размерных величин. Неизвестно ни одного закона природы, который приводил бы к сумме величин, имеющих различную размерность. Согласно формуле Тейлора, логарифм числа x сводится к сумме степеней x, поэтому считается, что логарифм от размерной величины смысла не имеет. (Вопрос об эмпирических формулах здесь не рассматривается.) Однако в формулах типа (16) логарифму размерной величины можно придать смысл. Умножим числители и знаменатели в (16) на σ^0. В результате получим

$$\left\langle \frac{\tau_n}{\sigma_n} \right\rangle = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sigma_1 \ln|\bar{\sigma}_1| - \sigma_2 \ln|\bar{\sigma}_2|}{\sigma_1 - \sigma_2} - \frac{\sigma_2 \ln|\bar{\sigma}_2| - \sigma_3 \ln|\bar{\sigma}_3|}{\sigma_2 - \sigma_3}\right].$$

Здесь вне логарифмов уже стоят размерные величины. Умножим теперь все безразмерные аргументы под знаком логарифма на одно и то же безразмерное число k. Тогда первая дробь получит приращение $+\ln(k)$, вторая $-\ln(k)$, а результат не изменится :

$$\ln(k) - \ln(k) = 0 .$$

Естественно, что для объекта $\ln\sigma^0$ должно иметь место свойство

$$\ln\sigma^0 - \ln\sigma^0 = 0\,.$$

В этом случае инвариант можно записать через все размерные величины:

$$\left\langle \frac{\tau_n}{\sigma_n} \right\rangle = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sigma_1 \ln|\sigma_1| - \sigma_2 \ln|\sigma_2|}{\sigma_1 - \sigma_2} - \frac{\sigma_2 \ln|\sigma_2| - \sigma_3 \ln|\sigma_3|}{\sigma_2 - \sigma_3}\right].$$

КРИТЕРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ (РАЗРУШЕНИЯ)

Рассмотренные инварианты представляют собой определенные заготовки, которые_можно использовать для конструирования различных критериев предельного состояния. Простейший критерий на основе логарифмического инварианта имеет вид

$$\left\langle \frac{\tau_n}{\sigma_n} \right\rangle = -\mathrm{tg}\Phi\,, \tag{17}$$

где Ф — константа материала. Знак "–" связан с тем, что, как и в теориях упругости и пластичности, сжимающие напряжения являются отрицательными. Увеличим все напряжения в k раз. Инвариант не изменится. Это значит, что условие (17) описывает только эффект внутреннего трения среды, т. е. предельное состояние идеально сыпучей среды. Причем здесь учитывается роль промежуточного главного напряжения σ_2.

Сцепление в критерий можно ввести путем замены σ_i на $\sigma_i - c$, где $i = 1,2,3$, $c > 0$ — параметр материала. В упрощенном варианте можно использовать инварианты (3), (12):

$$\langle \tau_n \rangle = -\mathrm{tg}\varphi \langle \sigma_n \rangle + c\,,$$

а также различные нелинейные зависимости: $f(\langle \tau_n \rangle, \langle \sigma_n \rangle) = 0$. Указанные критерии не противоречат известным критериям и имеющимся экспериментальным данным [1].

ВЫВОДЫ

Процедура осреднения напряжений в плоскости диаграммы Мора дает для нормальных напряжений новый инвариант, отличный от гидростатического давления, для касательных напряжений — инвариант, пропорциональный максимальному касательному напряжению, для отношения касательных напряжений к нормальным — инвариант, для которого аналогов в известных теориях нет. Полученные инварианты могут использоваться в критериях предельного состояния и разрушения горных пород, грунтов и сыпучих материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ставрогин А. И., Тарасов Б. Г.** Экспериментальная физика и механика горных пород. — СПб.: Наука, 2001.
2. **Литвинский Г. Г.** Аналитическая теория прочности горных пород и массивов. — Донецк: Норд-Пресс, 2008.
3. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. — М.: Мир, 1969.
4. **Новожилов В. В.** О физическом смысле инвариантов напряжения // ПММ. —1951. — Т. 15. — Вып. 2.
5. **Ильюшин А. А.** Пластичность. — М.: Гостехиздат, 1948.

Поступила в редакцию 22/IV 2014