УДК 532.516; 532.582

О СИЛОВОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ШАРА И ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ СТЕНКИ

В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассмотрена задача о силовом взаимодействии колеблющегося твердого шара и окружающей его вязкой жидкости, ограниченной извне плоской поверхностью покоящейся твердой стенки. Реализовано приближение, соответствующее тому, что наибольшее расстояние, на которое смещается шар, мало по сравнению с его радиусом, и радиус шара мал по сравнению с расстоянием между шаром и поверхностью стенки. Определено течение жидкости, найдена сила, действующая со стороны жидкости на шар.

Ранее рассмотрен ряд задач о движении твердого тела в идеальной жидкости при колебательных воздействиях [1–7]. Важнейшим результатом проведенной работы стало обнаружение новых эффектов среднего движения включений в жидкости. Естественное развитие исследований в этой области может состоять, в частности, в изучении поведения твердых включений в вязкой жидкости в условиях, аналогичных рассмотренным.

В [8] сформулирован принцип, в соответствии с которым основополагающей причиной эффектов среднего движения включений в жидкости при колебательных воздействиях является возможность совершения включениями движений в различных направлениях в неодинаковых условиях. Одна из задач, демонстрирующих справедливость этого принципа с очевидностью, — задача о движении твердого шара в жидкости в присутствии колеблющейся твердой стенки. Для идеальной жидкости решение этой задачи, содержащее эффект среднего движения включения, имеется в [7] (см. также [3, 6, 8]). Для вязкой жидкости такого рода задачи весьма сложны. Важным шагом к исследованию эффектов среднего движения твердых включений в вязкой жидкости является изучение силового взаимодействия твердого включения и вязкой жидкости при заданном движении включения.

1. Рассмотрим следующую задачу. В вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной извне плоской поверхностью абсолютно твердой стенки, находится абсолютно твердый шар. Стенка покоится, шар совершает заданные периодические с периодом T поступательные колебания относительно прямоугольной системы координат X_1, X_2, X_3. Поверхность стенки совпадает с плоскостью $X_1 = 0$. Занимаемая жидкостью область содержится в полупространстве $X_1 \geqslant 0$. Положение шара определяется радиусом-вектором $\boldsymbol{Z} = Z\boldsymbol{e}_1$ центра шара (Z — периодическая с периодом T функция от времени t; $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$). Течение жидкости является не зависящим от начальных условий. Требуется определить силовое взаимодействие шара и жидкости, т. е. найти силу $\boldsymbol{F}$, действующую со стороны жидкости на шар (сила, действующая со стороны шара на жидкость, есть $-\boldsymbol{F}$).

Пусть $\tau = t/T$; a — радиус шара; $x_1 = X_1/a$, $x_2 = X_2/a$, $x_3 = X_3/a$; $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$; ρ, $\boldsymbol{V}$, P — соответственно плотность, скорость жидкости и давление

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00812).

в жидкости; $\boldsymbol{v} = T\boldsymbol{V}/a$; $p = T^2P/(\rho a^2)$; ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости; $\mathrm{Re} = a^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса; $\mathcal{P}$ — тензор напряжений в жидкости; $\boldsymbol{W} = (dZ/dt)\boldsymbol{e}_1$ — скорость шара; $\hat{W}$ — наибольшее значение $|\boldsymbol{W}|$; $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{W}/\hat{W} = w\boldsymbol{e}_1$ $\Big(w = \mathrm{Real}\sum\limits_{m=1}^{\infty} w_m \mathrm{e}^{2m\pi i\tau}\Big)$; $\delta = \hat{W}T/a$; $\langle Z\rangle = \dfrac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} Z\,dt$; $\varepsilon = a/\langle Z\rangle$; $z = Z/\langle Z\rangle$; (q) — поверхность шара (уравнение (q) есть $(x_1 - z/\varepsilon)^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$); $\boldsymbol{n}$ — единичная внешняя нормаль к (q); (Q) — поверхность стенки (уравнение (Q) есть $x_1 = 0$).

Формула для силы, действующей со стороны жидкости на шар, уравнения Навье — Стокса и неразрывности и условия, которые должны выполняться на (q), (Q) и при $R \to \infty$, имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{F} = \iint\limits_{(q)} \mathcal{P}\cdot\boldsymbol{n}\,dq; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\tau} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\boldsymbol{v}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0; \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{w} \ \text{ на } \ (q), \quad \boldsymbol{v} = 0 \ \text{ на } \ (Q), \quad \boldsymbol{v} \to 0 \ \text{ при } \ R \to \infty. \tag{1.3}$$

2. Будем предполагать, что значения δ и ε малы по сравнению с единицей и значения δ малы по сравнению с значениями ε^3. Отметим, что значения Re не предполагаются малыми или большими по сравнению с единицей.

Найдем приближенное решение задачи (1.2), (1.3). Излагаемый ниже подход представляет собой развитие метода [9] решения задачи о потенциальном течении идеальной жидкости, распространение этого метода на задачу о течении вязкой жидкости, когда значения числа Рейнольдса не предполагаются малыми или большими по сравнению с единицей.

2.1. Рассмотрим задачу о течении жидкости в отсутствие стенки. В системе координат $X_1' = X_1 - Z$, $X_2' = X_2$, $X_3' = X_3$ (относительно которой шар неподвижен) имеем

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_0'}{\partial\tau} + (\boldsymbol{v}_0'\cdot\nabla')\boldsymbol{v}_0' = -\nabla' p_0' + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta'\boldsymbol{v}_0' - \delta\frac{d\boldsymbol{w}}{d\tau}, \quad \nabla'\cdot\boldsymbol{v}_0' = 0; \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{v}_0' = 0 \ \text{ при } \ r = 1, \qquad \boldsymbol{v}_0' \to -\delta\boldsymbol{w} \ \text{ при } \ r \to \infty, \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{v}_0' = T\boldsymbol{V}_0'/a$ ($\boldsymbol{V}_0'$ — скорость жидкости); $p_0' = T^2P_0'/(\rho a^2)$ (P_0' — давление в жидкости); $r = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}$ ($x_1' = X_1'/a$, $x_2' = X_2'/a$, $x_3' = X_3'/a$).

Предположим, что при $\delta \to 0$

$$\boldsymbol{v}_0' \sim \delta\boldsymbol{v}_0'^{(1)}, \qquad p_0' \sim \delta p_0'^{(1)}. \tag{2.3}$$

Используя (2.1)–(2.3), получим

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_0'^{(1)}}{\partial\tau} = -\nabla' p_0'^{(1)} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta'\boldsymbol{v}_0'^{(1)} - \frac{d\boldsymbol{w}}{d\tau}, \quad \nabla'\cdot\boldsymbol{v}_0'^{(1)} = 0; \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{v}_0'^{(1)} = 0 \ \text{ при } \ r = 1, \qquad \boldsymbol{v}_0'^{(1)} \to -\boldsymbol{w} \ \text{ при } \ r \to \infty. \tag{2.5}$$

Задача (2.4), (2.5) имеет решение

$$v_{0r}'^{(1)} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial r}, \qquad v_{0\theta}'^{(1)} = -\frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial\psi_0}{\partial r}; \tag{2.6}$$

$$p_0'^{(1)} = \Big\{ \Big[-\frac{\partial^2}{\partial\tau\,\partial r} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Big(\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r^3} \Big) \Big] \psi_0 - \frac{dw}{d\tau}\, r \sin^2\theta \Big\} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + c_0, \tag{2.7}$$

где

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\Big\{ -wr^2 + \mathrm{Real} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_m}{q_m} \Big[\frac{q_m^2 + 3q_m + 3}{q_m r} - \frac{3r^{1/2} K_{3/2}(q_m r)}{K_{1/2}(q_m)} \Big] \mathrm{e}^{2m\pi i\tau} \Big\} \sin^2\theta$$

($q_m = (1+i)\sqrt{m\pi\mathrm{Re}}$; $K_{1/2}$, $K_{3/2}$ — функции Макдональда); θ — угол между векторами $(1,0,0)$ и (x_1', x_2', x_3'); $v_{0r}'^{(1)}$, $v_{0\theta}'^{(1)}$ — r-, θ-компоненты вектора $\boldsymbol{v}_0'^{(1)}$; c_0 — функция от τ.

2.2. Перейдем в систему координат X_1, X_2, X_3. Определим, какая ошибка возникает на плоскости $x_1 = 0$ при подстановке в условие $\boldsymbol{v} = 0$ при $x_1 = 0$ $\delta(\boldsymbol{v}_0'^{(1)} + \boldsymbol{w})$ вместо $\boldsymbol{v}$. Согласно (2.6) имеем

$$\delta(\boldsymbol{v}_0'^{(1)} + \boldsymbol{w})\big|_{x_1=0} = \delta\big[(\nabla\chi)\big|_{x_1=0} + \boldsymbol{\xi}\big], \tag{2.8}$$

где

$$\chi = \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 A\, \frac{z - \varepsilon x_1}{[(z-\varepsilon x_1)^2 + \varepsilon^2(x_2^2 + x_3^2)]^{3/2}} \qquad \Big(A = \mathrm{Real} \sum_{m=1}^{\infty} w_m \frac{q_m^2 + 3q_m + 3}{q_m^2}\, \mathrm{e}^{2m\pi i\tau} \Big);$$

$\boldsymbol{\xi}$ — величина, малая по сравнению с ε^α (α — любое положительное число).

Рассмотрим следующую задачу о течении жидкости в отсутствие шара, решение которой компенсирует ошибку (2.8):

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_\text{к}}{\partial\tau} + (\boldsymbol{v}_\text{к}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_\text{к} = -\nabla p_\text{к} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\boldsymbol{v}_\text{к}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v}_\text{к} = 0; \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{v}_\text{к} = -\delta(\nabla\chi + \boldsymbol{\xi}) \ \text{ при } \ x_1 = 0, \qquad \boldsymbol{v}_\text{к} \to 0 \ \text{ при } \ R \to \infty, \tag{2.10}$$

где $\boldsymbol{v}_\text{к} = T\boldsymbol{V}_\text{к}/a$ ($\boldsymbol{V}_\text{к}$ — скорость жидкости); $p_\text{к} = T^2 P_\text{к}/(\rho a^2)$ ($P_\text{к}$ — давление в жидкости).

Предположим, что при $\delta \to 0$

$$\boldsymbol{v}_\text{к} \sim \delta\boldsymbol{v}_\text{к}^{(1)}, \qquad p_\text{к} \sim \delta p_\text{к}^{(1)}. \tag{2.11}$$

Используя (2.9)–(2.11), получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_\text{к}^{(1)}}{\partial\tau} = -\nabla p_\text{к}^{(1)} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\boldsymbol{v}_\text{к}^{(1)}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v}_\text{к}^{(1)} = 0; \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{v}_\text{к}^{(1)} = -\nabla\chi - \boldsymbol{\xi} \ \text{ при } \ x_1 = 0, \qquad \boldsymbol{v}_\text{к}^{(1)} \to 0 \ \text{ при } \ R \to \infty. \tag{2.13}$$

Сделаем в (2.12), (2.13) подстановку

$$\boldsymbol{v}_\text{к}^{(1)} = \boldsymbol{v}^* + \nabla\chi^*, \tag{2.14}$$

где

$$\chi^* = \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 A\, \frac{z + \varepsilon x_1}{[(z+\varepsilon x_1)^2 + \varepsilon^2(x_2^2 + x_3^2)]^{3/2}}.$$

В результате этого найдем

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}^*}{\partial\tau} = -\nabla\Big(p_\text{к}^{(1)} + \frac{\partial\chi^*}{\partial\tau} \Big) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\boldsymbol{v}^*, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v}^* = 0; \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{v}^* = -\nabla(\chi + \chi^*) - \boldsymbol{\xi} \ \text{ при } \ x_1 = 0, \qquad \boldsymbol{v}^* \to 0 \ \text{ при } \ R \to \infty. \tag{2.16}$$

Задача (2.15), (2.16) имеет следующее решение, приближенно, с точностью до величин, малых по сравнению с ε^4, ε^3, ε^α, удовлетворяющее соответственно первому уравнению (2.15), второму уравнению (2.15) и первому условию (2.16) и точно удовлетворяющее второму условию (2.16):

$$v_1^* = 0,$$
$$v_L^* = \frac{3\varepsilon^4 x_L}{[z^2 + \varepsilon^2(x_2^2 + x_3^2)]^{5/2}} \operatorname{Real} \sum_{m=1}^{\infty} w_m \frac{q_m^2 + 3q_m + 3}{q_m^2} \operatorname{e}^{-q_m x_1 + 2m\pi i \tau} \quad (L = 2,\, 3); \tag{2.17}$$

$$p_{\text{к}}^{(1)} + \frac{\partial \chi^*}{\partial \tau} = C_{\text{к}}, \tag{2.18}$$

где v_1^*, v_2^*, v_3^* — x_1-, x_2-, x_3-компоненты вектора $\boldsymbol{v}^*$; $C_{\text{к}}$ — функция от τ. Согласно этому задача (2.9), (2.10) имеет решение (2.14), (2.17), (2.18).

Выражение для $\delta(\boldsymbol{v}_0'^{(1)} + \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_{\text{к}}^{(1)})$, которое определяется соотношениями (2.6), (2.14), (2.17), удовлетворяет условию $\delta(\boldsymbol{v}_0'^{(1)} + \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}_{\text{к}}^{(1)}) = 0$ при $x_1 = 0$ с точностью до величин, малых по сравнению с $\delta\varepsilon^\alpha$.

2.3. Перейдем в систему координат X_1', X_2', X_3'. Определим, какая ошибка возникает на сфере $r = 1$ при подстановке в условие $\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{w} = 0$ при $r = 1$ $\delta(\boldsymbol{v}_0'^{(1)} + \boldsymbol{v}_{\text{к}}^{(1)})$ вместо $\boldsymbol{v} - \delta\boldsymbol{w}$. Согласно (2.6), (2.14), (2.17) имеем

$$\delta(\boldsymbol{v}_0'^{(1)} + \boldsymbol{v}_{\text{к}}^{(1)})\big|_{r=1} = \delta\big[(\nabla\chi^*)\big|_{r=1} + \boldsymbol{\xi}'\big], \tag{2.19}$$

где $\boldsymbol{\xi}'$ — величина, малая по сравнению с $\varepsilon^{\alpha'}$ (α' — любое положительное число).

Рассмотрим следующую задачу о течении жидкости в отсутствие стенки, решение которой компенсирует ошибку (2.19):

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\text{к}}'}{\partial \tau} + (\boldsymbol{v}_{\text{к}}' \cdot \nabla')\boldsymbol{v}_{\text{к}}' = -\nabla' p_{\text{к}}' + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta' \boldsymbol{v}_{\text{к}}' - \delta \frac{d\boldsymbol{w}}{d\tau}, \qquad \nabla' \cdot \boldsymbol{v}_{\text{к}}' = 0; \tag{2.20}$$

$$\boldsymbol{v}_{\text{к}}' = -\delta(\nabla\chi^* + \boldsymbol{\xi}') \text{ при } r = 1, \qquad \boldsymbol{v}_{\text{к}}' \to 0 \text{ при } r \to \infty, \tag{2.21}$$

где $\boldsymbol{v}_{\text{к}}' = T\boldsymbol{V}_{\text{к}}'/a$ ($\boldsymbol{V}_{\text{к}}'$ — скорость жидкости); $p_{\text{к}}' = T^2 P_{\text{к}}'/(\rho a^2)$ ($P_{\text{к}}'$ — давление в жидкости).

Предположим, что при $\delta \to 0$

$$\boldsymbol{v}_{\text{к}}' \sim \delta \boldsymbol{v}_{\text{к}}'^{(1)}, \qquad p_{\text{к}}' \sim \delta p_{\text{к}}'^{(1)}. \tag{2.22}$$

Используя (2.20)–(2.22), получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\text{к}}'^{(1)}}{\partial \tau} = -\nabla' p_{\text{к}}'^{(1)} + \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta' \boldsymbol{v}_{\text{к}}'^{(1)} - \frac{d\boldsymbol{w}}{d\tau}, \qquad \nabla' \cdot \boldsymbol{v}_{\text{к}}'^{(1)} = 0; \tag{2.23}$$

$$\boldsymbol{v}_{\text{к}}'^{(1)} = -\nabla\chi^* - \boldsymbol{\xi}' \text{ при } r = 1, \qquad \boldsymbol{v}_{\text{к}}'^{(1)} \to 0 \text{ при } r \to \infty. \tag{2.24}$$

Задача (2.23), (2.24) имеет следующее решение, приближенно, с точностью до величин, малых по сравнению с ε^3, удовлетворяющее первому условию (2.24) и точно удовлетворяющее (2.23) и второму условию (2.24):

$$v_{\text{к}r}'^{(1)} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \psi_{\text{к}}}{\partial \theta}, \qquad v_{\text{к}\theta}'^{(1)} = -\frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial \psi_{\text{к}}}{\partial r}; \tag{2.25}$$

$$p_{\text{к}}'^{(1)} = \Big\{\Big[-\frac{\partial^2}{\partial\tau\,\partial r} + \frac{1}{\operatorname{Re}}\Big(\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r^3}\Big)\Big]\psi_{\text{к}} - \frac{dw}{d\tau} r \sin^2\theta\Big\} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + c_{\text{к}}, \tag{2.26}$$

где

$$\psi_{\text{к}} = \frac{1}{16}\,\varepsilon^3\,\mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty} w_m\,\frac{q_m^2+3q_m+3}{q_m^3}\Big[\frac{q_m^2+3q_m+3}{q_m r} - \frac{3r^{1/2}K_{3/2}(q_m r)}{K_{1/2}(q_m)}\Big]\mathrm{e}^{2m\pi i\tau}\sin^2\theta;$$

$c_{\text{к}}$ — функция от τ.

Выражение для $\delta(\boldsymbol{v}_0'^{(1)}+\boldsymbol{v}_{\text{к}}^{(1)}+\boldsymbol{v}_{\text{к}}'^{(1)})$, которое определяется соотношениями (2.6), (2.14), (2.17), (2.25), удовлетворяет условию $\delta(\boldsymbol{v}_0'^{(1)}+\boldsymbol{v}_{\text{к}}^{(1)}+\boldsymbol{v}_{\text{к}}'^{(1)})=0$ при $r=1$ с точностью до величин, малых по сравнению с $\delta\varepsilon^3$.

2.4. В соответствии с изложенным выше задача (1.2), (1.3) имеет приближенное решение, которое определяется формулами

$$\boldsymbol{v} = \delta(\boldsymbol{v}_0'^{(1)}+\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}_{\text{к}}^{(1)}+\boldsymbol{v}_{\text{к}}'^{(1)}), \qquad p = \delta\Big(p_0'^{(1)}+p_{\text{к}}^{(1)}+p_{\text{к}}'^{(1)}+\frac{dw}{d\tau}\,x_1\Big)+c \tag{2.27}$$

и (2.6), (2.7), (2.14), (2.17), (2.18), (2.25), (2.26) (c — функция от τ). Это решение приближенно, с точностью до величин, малых по сравнению с $\delta\varepsilon^3$, удовлетворяет (1.2) и первым двум условиям (1.3) и точно удовлетворяет последнему условию (1.3).

3. Используя (1.1), (2.6), (2.7), (2.14), (2.17), (2.18), (2.25)–(2.27), получим

$$\boldsymbol{F} = -\frac{2\pi a^3\rho\hat{W}}{3T}\Big\{\frac{dw}{d\tau} - 18\pi\ \mathrm{Imag}\sum_{m=1}^{\infty} m w_m\frac{q_m+1}{q_m^2}\,\mathrm{e}^{2m\pi i\tau} + {} + \frac{3}{8}\,\varepsilon^3\Big[\frac{dw}{d\tau} - 12\pi\ \mathrm{Imag}\sum_{m=1}^{\infty} m w_m\frac{q_m+1}{q_m^4}\Big(q_m^2+\frac{3}{2}\,q_m+\frac{3}{2}\Big)\mathrm{e}^{2m\pi i\tau}\Big]\Big\}\boldsymbol{e}_1. \tag{3.1}$$

Соотношением (3.1) определяется силовое взаимодействие шара и жидкости.

Из (3.1), в частности, следует, что при $\varepsilon=0$

$$\boldsymbol{F} = -\frac{2\pi a^3\rho\hat{W}}{3T}\Big[\frac{dw}{d\tau} - 18\pi\,\mathrm{Imag}\sum_{m=1}^{\infty} m w_m\frac{q_m+1}{q_m^2}\,\mathrm{e}^{2m\pi i\tau}\Big]\boldsymbol{e}_1. \tag{3.2}$$

Формула (3.2) находится в соответствии с формулой для силы, действующей со стороны вязкой неограниченной извне жидкости на колеблющийся в ней твердый шар, содержащейся в [10].

4. Реализованный подход к определению течения вязкой жидкости с включением в присутствии стенки позволяет изучать эффекты среднего движения включений в вязкой жидкости. Этот подход может быть применен, в частности, для исследования влияния вязкости жидкости на пребывание находящегося в ней твердого включения в состоянии парадоксального равновесия, его «левитирование» при колебательных воздействиях на жидкость [1, 3, 7].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.
2. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // ПМТФ. 1986. № 4. С. 31–36.
3. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
4. **Любимов Д. В., Любимова Т. П., Черепанов А. А.** О движении твердого тела в вибрирующей жидкости // Конвективные течения. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1987. С. 61–71.

5. **Лаврентьева О. М.** О движении твердого тела в идеальной пульсирующей жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1991. Вып. 103. С. 120–125.
6. **Sennitskii V. L.** On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid // Proc. of the Intern. workshop on G-jitter. Potsdam (USA): Clarkson Univ., 1993. P. 178–186.
7. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
8. **Сенницкий В. Л.** Движение включений в колеблющейся жидкости // Сиб. физ. журн. 1995. № 4. С. 18–26.
9. **Кирхгоф Г.** Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
10. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.

Поступила в редакцию 26/XII 1998 г.