

УДК 539.42

МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ УГЛА ЭЖЕКЦИИ ПРИ ПРОНИКАНИИ УДАРНИКА В МАССИВНУЮ ПРЕГРАДУ

В. А. Головешкин^{*,**}, Н. Н. Мягков^{**}, Т. А. Шумихин^{**}

^{*} Московский технологический университет, 107996 Москва, Россия

^{**} Институт прикладной механики РАН, 125040 Москва, Россия

E-mails: nikshevolog@yandex.ru, nn_miyagkov@mail.ru, shumikhin@iam.ras.ru

Аналитически решается задача о проникании жесткого ударника в полубесконечную преграду для определения зависимости угла разлета эжекционных частиц (угла эжекции) от глубины проникания ударника. Задача рассматривается в предположении плоского деформированного состояния материала преграды. Для описания механических свойств материала преграды принимается гипотеза его несжимаемости и идеальной пластичности. На основе энергетического баланса получено уравнение движения (проникания) ударника. Углы эжекции определяются из условия минимума мощности внутренних сил. Установлено, что в случае проникания ударника на бесконечную глубину предельное значение угла эжекции (угла возвышения) составляет приблизительно 84° .

Ключевые слова: проникание, эжекция, высокоскоростной удар, аналитическая модель, космический мусор.

DOI: 10.15372/PMTF20220117

Введение. Взаимодействие ударника с твердой преградой при достаточно больших скоростях удара приводит к его фрагментации с образованием потока частиц, эжектируемых с большой скоростью в ту область полупространства (относительно преграды), из которой вылетел ударник. Такие частицы называются эжекционными частицами (ЭЧ). Процессы эжекции частиц исследовались, например, в работах [1–5]. Основными параметрами, характеризующими ЭЧ, являются углы их разлета по отношению к поверхности преграды и пространственное распределение по массам, размерам, скоростям, количеству и фазовому состоянию.

Обычно выделяются три типа эжекции частиц [1, 2].

1. Испускание небольшого количества мелких и быстрых частиц, эжектируемых под острыми углами на ранней стадии удара. Масса этих частиц составляет порядка сотых долей 1 % массы ударника, а их скорость превышает скорость ударника в 2–3 раза.

2. Формирование на более поздней стадии проникания ударника конуса быстрых частиц, исходящих из кратера или отверстия, образующегося вследствие удара, и эжектируемых при приблизительно постоянном угле возвышения. Для тонких преград масса выбрасываемых частиц составляет приблизительно 25 % массы ударника, а в случае преград большой толщины превышает массу ударника.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (номер государственной регистрации 121112200122-7).

© Головешкин В. А., Мягков Н. Н., Шумихин Т. А., 2022

3. В случае хрупких материалов откол со стороны удара крупных фрагментов, эжектируемых с малыми скоростями.

Таким образом, в случае пластичных материалов наиболее важным является исследование конуса эжекты.

Существует достаточно большое количество эмпирических моделей, описывающих эжекцию с учетом общей массы ЭЧ и преграды, физического состояния ЭЧ, их распределения по размерам и скоростям, угла эжекции (угла разлета ЭЧ). Обзор эмпирических моделей приведен в работе [1]. Следует отметить, что угол эжекции не является постоянной величиной. На начальном этапе ударного воздействия, когда головная часть ударника входит в контакт с преградой, угол эжекции (угол возвышения) имеет минимальное значение. В процессе проникания угол эжекции увеличивается до максимального (предельного) значения. Например, при ударе алюминиевого ударника по алюминиевой преграде максимальное значение угла возвышения составляет $\gamma \approx 64^\circ$ [6], а при ударе стального ударника по стеклу — $\gamma = 60 \div 70^\circ$ [7].

Представляет интерес исследование зависимости угла эжекции от глубины проникания ударника в преграду. Например, изучение этой зависимости в работе [8] позволило объяснить распределение следов, оставляемых потоками ЭЧ на коллекторах в экспериментах [4, 5].

В настоящей работе аналитически решается задача о проникании жесткого ударника в бесконечную преграду. Задача рассматривается в предположении плоского деформированного состояния материала преграды. Целью работы является построение механической модели, позволяющей оценить углы эжекции и определить зависимость этих углов от глубины проникания ударника.

1. Модель взаимодействия жесткого ударника с деформируемой преградой.

Для описания деформации материала преграды предложена модель, близкая к модели, исследованной в [9]. Принимается гипотеза несжимаемости и идеальной пластичности материала полубесконечной преграды с пределом текучести Y_p и плотностью ρ . Ударник считается абсолютно жестким телом.

Рассмотрим схему взаимодействия ударника и преграды (рис. 1). Считаем, что деформация происходит в плоскости XU . Сечение ударника данной плоскостью имеет форму прямоугольника. Ось X проходит по начальной недеформированной поверхности, ось Y перпендикулярна этой поверхности. Поперечный размер ударника равен $2l$. Ударник движется перпендикулярно преграде. Текущая глубина проникания принимается равной $2h$. В силу плоского характера деформации далее все величины отнесены к единице длины в направлении, перпендикулярном плоскости XU . Массу ударника на единицу длины принимаем равной M .

Рассмотрим случай, когда поле скоростей симметрично относительно оси Y . Скорость ударника принимаем равной V , в начальный момент $V = V_0$.

Область деформирования материала преграды состоит из следующих зон.

Зона I (сегмент круга A_1BA). Материал преграды движется вместе с ударником как жесткое тело. Размеры сегмента — угол β и положение центра O_1 — определяются в процессе решения. Соответствующие скорости равны $u_x = 0$, $u_y = V$.

Зона II (сектор кольца $A_1BACB_1C_1$ с центром в точке O_1). Размеры сектора определяются в ходе решения. Полагаем $O_1A = a$, $O_1C = b$. В локальной полярной системе координат (r, φ) с центром в точке O_1 (полярная ось совпадает с осью Y) принимается гипотеза, что скорость u_φ зависит только от угла φ , т. е. $u_\varphi = f(\varphi)$. Тогда в силу условия несжимаемости

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0.$$

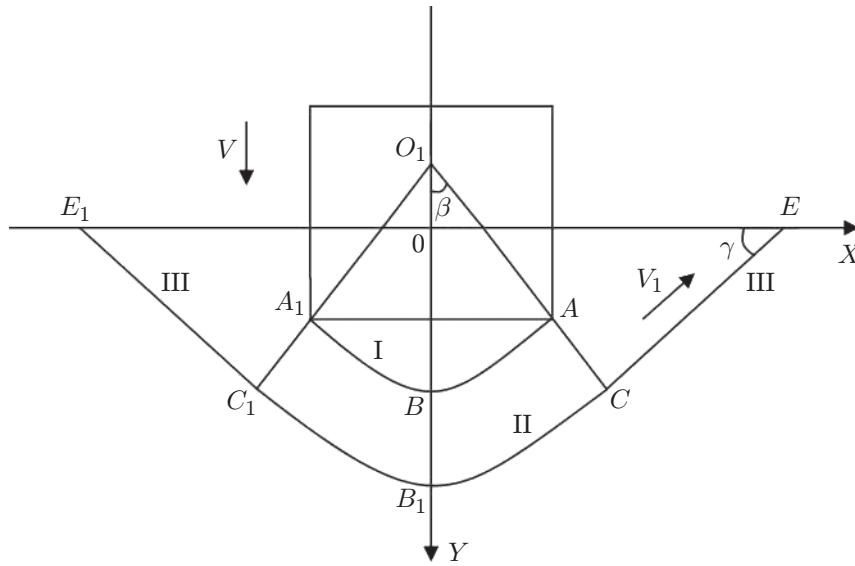


Рис. 1. Схема задачи о проникании ударника в преграду

Следовательно, $\partial(ru_r)/\partial r = -df/d\varphi$. Интегрируя это выражение, имеем $u_r = -df/d\varphi + g(\varphi)/r$. Полагая $u_r = 0$ при $r = b$, получаем $u_r = (df/d\varphi)(b-r)/r$. В силу непрерывности нормальной скорости при $r = a$ выполняется условие $(df/d\varphi)(b-a)/a = V \cos \varphi$. Так как $f(0) = 0$, то $f(\varphi) = (Va/(b-a)) \sin \varphi$. Тогда окончательно получаем

$$u_r = \frac{Va}{b-a} \frac{b-r}{r} \cos \varphi, \quad u_\varphi = \frac{Va}{b-a} \sin \varphi.$$

Зона III. Материал движется как жесткое тело со скоростью V_1 в направлении CE , составляющем угол γ с осью X . Заметим, что угол γ является углом эжекции. В силу непрерывности нормальной скорости на участке AC имеем

$$V_1 \cos(\gamma - \beta) = \frac{Va}{b-a} \sin \beta, \quad V_1 = \frac{Va}{b-a} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)}.$$

Кинетическую энергию системы E (на единицу длины) можно представить в виде суммы кинетической энергии ударника

$$E_1 = \frac{1}{2} MV^2$$

(M — масса ударника, отнесенная к единице длины), кинетической энергии в зоне I

$$E_2 = \frac{1}{2} \rho V^2 a^2 \left(\beta - \frac{1}{2} \sin(2\beta) \right),$$

кинетической энергии в зоне II

$$E_3 = \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{a^2}{(b-a)^2} \left[2\beta \left(b^2 \ln \frac{b}{a} - (b-a)^2 \right) + \sin(2\beta) \left(b^2 \ln \frac{b}{a} - 2b(b-a) \right) \right],$$

кинетической энергии в зоне III

$$E_4 = \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{a^2}{(b-a)^2} \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2(\gamma - \beta)} \left(2lh + 2h^2 \sin \beta + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} h(b-a) \sin(2\beta) + \frac{[h + (b-a) \cos \beta]^2}{\operatorname{tg} \gamma} \right). \quad (1)$$

В (1) предполагалось, что вся масса материала (в том числе масса вытесненного ударником материала, не показанного на рис. 1) находится в зоне, ограниченной линией $E_1C_1A_1ACE$ (зоне III). Полная кинетическая энергия E равна

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4.$$

Полную мощность внутренних сил W можно представить в виде суммы

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5.$$

Мощность W_1 в деформируемой зоне II равна

$$W_1 = Y_p \sqrt{\frac{2}{3}} \iint_{A_1BACB_1C_1} \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_{r\varphi}^2} r dr d\varphi.$$

В результате интегрирования по площади получаем

$$W_1 = Y_p \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{Vab}{b-a} \ln \frac{b}{a} \int_0^\beta \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Мощность W_2 на линии A_1BA , на которой касательная скорости имеет разрыв, равна

$$W_2 = \int_{A_1BA} \frac{Y_p}{\sqrt{3}} [v] ds.$$

С учетом того, что разрыв скорости $[v]$ на линии A_1BA равен $[v] = (Va/(b-a)) |\sin \varphi|$, получаем

$$W_2 = \frac{2Y_p}{\sqrt{3}} \frac{Va^2}{b-a} (1 - \cos \beta).$$

Мощность W_3 — мощность на линии C_1B_1C , на которой касательная скорости имеет разрыв. Поскольку разрыв скорости $[v]$ на этой линии равен $[v] = (Va/(b-a)) |\sin \varphi|$, получаем

$$W_3 = \frac{2Y}{\sqrt{3}} \frac{Vab}{b-a} (1 - \cos \beta).$$

Мощность W_4 — мощность на линиях C_1E_1 и EC , на которых касательная скорости имеет разрыв. Учитывая, что разрыв скорости $[v]$ на этих линиях равен $[v] = (Va/(b-a)) \sin \beta / \cos(\gamma - \beta)$, а их суммарная длина $L = 2(h + (b-a) \cos \beta) / \sin \gamma$, имеем

$$W_4 = \frac{2Y}{\sqrt{3}} \frac{Va}{b-a} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \frac{h + (b-a) \cos \beta}{\sin \gamma}.$$

Мощность W_5 — мощность на линиях C_1A_1 и AC , на которых касательная скорости имеет разрыв. Учитывая, что разрыв скорости $[v]$ на этих линиях равен

$$[v] = \frac{Va}{b-a} \frac{b-r}{r} \cos \beta + \frac{Va}{b-a} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \sin(\gamma - \beta),$$

получаем

$$W_5 = \frac{2Y}{\sqrt{3}} \frac{Va}{b-a} \left[\left(b \ln \frac{b}{a} - (b-a) \right) \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma-\beta)} \sin(\gamma-\beta)(b-a) \right].$$

Выражение для полной кинетической энергии системы представим в виде

$$E = \frac{1}{2} V^2 [M + \rho l^2 F(x, \bar{h}, \beta, \gamma)].$$

Учитывая, что $a = l/\sin \beta$, и вводя обозначения $x = b/a$, $\bar{h} = h/l$ (далее черта над h опускается), имеем

$$\begin{aligned} F(x, h, \beta, \gamma) = & \frac{\beta - (1/2) \sin(2\beta)}{\sin^2 \beta} + \\ & + \frac{1}{\sin^2 \beta (x-1)^2} \{ 2\beta [x^2 \ln x - (x-1)^2] + \sin(2\beta) [x^2 \ln x - 2x(x-1)] \} + \\ & + \frac{1}{(x-1)^2} \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2(\gamma-\beta)} \left\{ 2h + 2h^2 \sin \beta + h(x-1) \cos \beta + \frac{[h + ((x-1)/\sin \beta) \cos \beta]^2}{\operatorname{tg} \gamma} \right\}. \end{aligned}$$

Выражение для полной мощности W представим в виде

$$W = \frac{2Y_p V}{\sqrt{3}} l G(x, h, \beta, \gamma),$$

где

$$\begin{aligned} G(x, h, \beta, \gamma) = & \frac{2x}{x-1} \ln x \frac{1}{\sin \beta} \int_0^\beta \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{x+1}{x-1} \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} + \\ & + \frac{1}{x-1} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma-\beta)} \frac{h + (x-1) \cos \beta / \sin \beta}{\sin \gamma} + \\ & + \frac{1}{x-1} \left([x \ln x - (x-1)] \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma-\beta)} \sin(\gamma-\beta)(x-1) \right). \quad (2) \end{aligned}$$

Закон изменения скорости определяется уравнением

$$\frac{dE}{dt} + W = 0. \quad (3)$$

Используя приведенные выше соотношения для кинетической энергии и полной мощности, из (3) получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} V^2 [M + \rho l^2 F(x, h, \beta, \gamma)] \right) + \frac{2Y_p V}{\sqrt{3}} l G(x, h, \beta, \gamma) = 0.$$

Так как $dh/dt = V/l$, то можно исключить время t и определить скорость как функцию глубины проникания h с помощью дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} (M + \rho l^2 F) \frac{dV}{dh} = & -\frac{1}{2} \rho l^2 V \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dh} - \frac{1}{2} \rho l^2 V \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dh} - \\ & - \frac{1}{2} \rho l^2 V \frac{\partial F}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dh} - \frac{1}{2} \rho l^2 V \frac{\partial F}{\partial h} - \frac{2Y}{\sqrt{3}} \frac{l^2}{V} G(x, h, \beta) \quad (4) \end{aligned}$$

при условии $V = V_0$ на начальной недеформированной поверхности $h = 0$.

2. Оценка величины угла эжекции в зависимости от глубины проникания ударника. Значения x , β , γ определяются из условия минимума мощности внутренних сил при дополнительном условии $0 \leq \beta \leq \gamma \leq \pi/2$. Заметим, что с приемлемой точностью выполняется соотношение

$$\int_0^{\beta} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{13}{16} \beta + \frac{3}{32} \sin(2\beta).$$

Таким образом, из (2) следует

$$G(x, h, \beta, \gamma) = \frac{x}{x-1} \ln x \left(\frac{13}{8} \frac{\beta}{\sin \beta} + \frac{3}{8} \cos \beta + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right) + \frac{x+1}{x-1} \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} + \\ + \frac{h}{x-1} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \frac{1}{\sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \frac{1}{\sin \gamma} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \sin(\gamma - \beta). \quad (5)$$

Из условий

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \gamma} = 0$$

и (5) получаем систему уравнений для определения x , β , γ , которая может быть представлена в виде

$$(x-1 - \ln x) \left(\frac{13}{8} \beta + \frac{3}{8} \sin \beta \cos \beta + \cos \beta \right) - 2(1 - \cos \beta) - h \frac{\sin^2 \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \frac{1}{\sin \gamma} = 0; \quad (6)$$

$$x \ln x \left(\frac{13}{8} (\sin \beta - \beta \cos \beta) - \frac{3}{8} \sin^3 \beta - 1 \right) + (x+1)(1 - \cos \beta) + \\ + h \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\sin^2 \beta \cos \gamma}{\cos^2(\gamma - \beta)} - \frac{(x-1) \sin^2 \beta}{\cos^2(\gamma - \beta)} + (x-1) - (x-1) \frac{\sin \beta}{\cos^2(\gamma - \beta)} = 0; \quad (7)$$

$$-(h \sin \beta + (x-1) \cos \beta) \cos(2\gamma - \beta) + (x-1) \sin \beta \sin^2 \gamma = 0. \quad (8)$$

Поскольку глубина проникания ударника h входит в соотношения (6)–(8) в качестве параметра, величины x , β и угол возвышения γ могут быть определены из решения этих уравнений как функции глубины проникания h при условии $0 \leq \beta \leq \gamma \leq \pi/2$.

Согласно (8)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{h \operatorname{tg}^2 \beta + (x-1) \operatorname{tg} \beta + \sqrt{D}}{h \operatorname{tg} \beta + (x-1)(\operatorname{tg} \beta / \cos \beta + 1)}, \quad (9)$$

где

$$D = h^2 \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\cos^2 \beta} + h(x-1) \left(2 \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta} + \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\cos \beta} \right) + (x-1)^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos \beta} \right).$$

Если значение $\operatorname{tg} \gamma$, вычисленное по формуле (9), не удовлетворяет условию $\operatorname{tg} \gamma \geq \operatorname{tg} \beta$, то полагаем $\gamma = \beta$. Это означает, что минимум мощности достигается на границе области допустимых значений γ .

Из соотношений (6)–(8) следует, что величины x , β , γ не зависят от материальных параметров ударника и преграды. Материальные параметры входят только в уравнение (4), из которого определяется зависимость скорости проникания от глубины h .

Расчеты показали, что $\gamma = \beta$. На рис. 2 приведена расчетная зависимость угла эжекции γ от глубины проникания h .

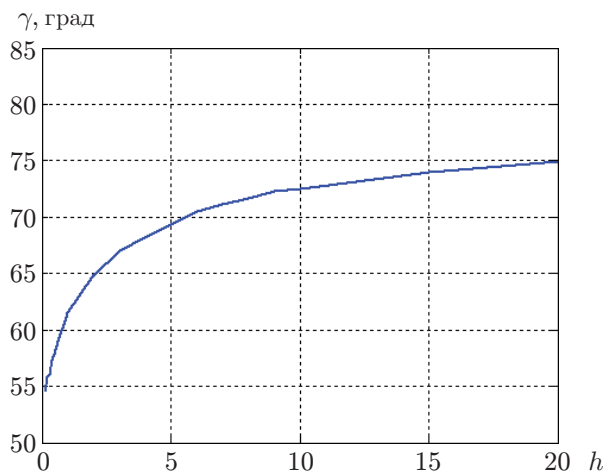


Рис. 2. Зависимость угла эжекции γ от глубины проникания h

С учетом $\gamma = \beta$ из соотношений (7), (8) получаем

$$\frac{x}{x+1} \ln x \left(\frac{13}{8} (\sin \gamma - \gamma \cos \gamma) - \frac{3}{8} \sin^3 \gamma - 1 \right) + 1 - \cos \gamma = 0. \quad (10)$$

При $h \rightarrow \infty$ очевидно, что $x \rightarrow \infty$ и $\gamma \rightarrow \alpha$, где $0 < \alpha < \pi/2$ — предельный угол возвышения, полученный как решение уравнения

$$\frac{13}{8} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{3}{8} \sin^3 \alpha - 1 = 0. \quad (11)$$

Соотношение (11) следует из (10) при $x \rightarrow \infty$. Из (11) получаем $\alpha \approx 84,05^\circ$. С увеличением h значение γ медленно приближается к α , что обусловлено логарифмической расходимостью в соотношении (10) при $x \rightarrow \infty$ вследствие двумерности рассматриваемой задачи.

Заключение. В работе аналитически исследуется задача о проникании жесткого ударника в бесконечную преграду для определения зависимости угла вылета эжекционных частиц (угла эжекции) от глубины проникания ударника.

Установлено, что угол эжекции не зависит от материальных параметров ударника и преграды. Оценки, выполненные с помощью рассматриваемой модели, показывают, что при глубине проникания компактного ударника $h = 0,5 \div 2,0$ (в единицах поперечного размера) угол эжекции равен $\gamma = 58 \div 65^\circ$. Эти значения γ согласуются с известными экспериментальными данными $\gamma \approx 60^\circ$ [3], $\gamma \approx 55^\circ$ [5] и $\gamma = 60 \div 70^\circ$ [7].

Для ударника в виде длинного стержня при большой глубине проникания $h \gg 1$ угол эжекции незначительно изменяется с увеличением h . В случае $h \rightarrow \infty$ полученный предельный угол возвышения равен $\alpha \approx 84^\circ$. Данное значение предельного угла α превышает значения, полученные экспериментальным путем (например, $\alpha = 64^\circ$ [6]). Это обусловлено тем, что, во-первых, решается двумерная задача и, во-вторых, в эксперименте, как правило, используются преграды, толщина которых не превышает 10–20 поперечных размеров ударника. В этом случае угол эжекции составляет $\gamma = 72 \div 75^\circ$. Кроме того, в представленной модели учитывается только направление возможного движения отделяющихся частиц эжекции, но само условие их отделения не используется. Экспериментальные исследования показывают, что отделение частиц эжекции (которые формируют конус эжекции в эксперименте) заканчивается раньше, чем прекращается движение материала в деформируемой преграде. Таким образом, предельный угол эжекции должен иметь меньшее значение, если модель учитывает формирование (отделение) эжекционных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Francesconi A., Higashide M., Mandeville J. C., et al.** Characterization of ejecta from HVI on spacecraft outer surfaces / Inter-Agency Space Debris Coordination Committee; N IADC-11-05; S. l., 2013. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: https://www.iadc-home.org/documents_public/view/page/3/id/107#u.
2. **Rival M., Mandeville J. C.** Modeling of ejecta produced upon hypervelocity impacts // Space Debris. 1999. V. 1. P. 45–57. DOI: 10.1023/A:1010021403591.
3. **Bariteau M., Mandeville J. C.** Modelling of ejecta as a space debris source // Space Debris. 2000. V. 2. P. 97–107. DOI: 10.1023/A:1021224411334.
4. **Myagkov N. N., Bezrukov L. N., Shumikhin T. A.** Experimental investigation of ejecta generated by the hypervelocity impact of aluminum projectiles on continuous and mesh bumpers // Proc. of the 5th Europ. conf. on space debris, Darmstadt (Germany), 30 Mar. — 2 Apr. 2009. S. l.: ESA/ESOC, 2009. P. 1–6.
5. **Shumikhin T. A., Myagkov N. N., Bezrukov L. N.** Properties of ejecta generated at high-velocity perforation of thin bumpers made from different constructional materials // Intern. J. Impact Engng. 2012. V. 50. P. 90–98. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2012.06.008.
6. **Christiansen E. L.** Evaluation of space station meteoroid/debris shielding materials. Houston, 1987. (Rep. / Eagle Engng; N 87-163).
7. **Schneider E., Stilp A.** Meteoroids/debris simulation at EMI: Experimental methods and recent results // Proc. of the 1st Europ. conf. on space debris, Darmstadt (Germany), 5–7 Apr. 1993. S. l., 1993. P. 401–404.
8. **Myagkov N. N., Shumikhin T. A.** Modeling of high-velocity impact ejecta by experiments with a water drop impacting on a water surface // Acta Mech. 2016. V. 227. P. 2911–2924. DOI: 10.1007/s00707-016-1661-y.
9. **Goloveshkin V. A., Myagkov N. N.** Estimating parameters of fragments forming at penetration of periodic system of strings into a semi-infinite target // Intern. J. Impact Engng. 2013. V. 61. P. 13–23. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2013.06.003.

*Поступила в редакцию 16/VI 2020 г.,
после доработки — 17/IX 2020 г.
Принята к публикации 28/IX 2020 г.*
