ЛИТЕРАТУРА

1. **Cowley M. D., Rosensweig R. E.** The interfacial stability of a ferromagnetic fluid.— «J. Fluid. Mech.», 1967, vol. 30, N 4, p. 671—676.
2. **Тарапов И. Е.** Поверхностные волны и устойчивость свободной поверхности намагничивающейся жидкости.— ПМТФ, 1974, № 4, с. 35—40.
3. **Тактаров Н. Г.** Об устойчивости тангенциального разрыва в феррогидродинамике.— «Труды Ин-та механики МГУ», 1974, № 31, с. 194—196.
4. **Баштовой В. Г., Краков М. С.** О возбуждении волн на поверхности ферромагнитной жидкости бегущим магнитным полем.— «Магнит. гидродинамика», 1976, № 4.
5. **Баштовой В. Г., Берковский Б. М.** Термомеханика ферромагнитных жидкостей.— «Магнит. гидродинамика», 1973, № 3.

УДК 532.516

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ТЕЛА ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

А. А. Миронов

(Москва)

Задача оптимизации формы тела в потоке вязкой жидкости или газа рассматривалась ранее в работах [1—5]. В [1] получены необходимые условия, которым должно удовлетворять тело минимального сопротивления при обтекании его вязким газом. Работа [2] посвящена выводу необходимых условий оптимальности в случае, когда движение жидкости описывается приближенными уравнениями Стокса. В [3] найдена численно форма тела минимального сопротивления в стоксовом приближении. В работах [4, 5] получены условия оптимальности в случае, когда движение жидкости описывается уравнениями Навье—Стокса, причем в [4] эти условия распространены на случай, когда движение жидкости описывается в приближении пограничного слоя. В работе [5], кроме того, получены необходимые условия оптимальности, когда движение жидкости описывается приближенными уравнениями Озеена, а также проведен асимптотический анализ поведения оптимальной формы вблизи критических точек при произвольных числах Рейнольдса.

1. Краевая задача для определения формы тела минимального сопротивления среди тел заданного объема, сформулированная в работах [4, 5], может быть приведена к виду

$$\Delta \mathbf{v} - \nabla p = \mathrm{Re}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v},\ \nabla\mathbf{v} = 0,\ (\mathbf{v})_S = 0,\ (\mathbf{v})_\Sigma = \mathbf{v}_\Sigma, \tag{1.1}$$

$$\Delta \mathbf{u} - \nabla q = \mathrm{Re}[\mathbf{v}\nabla\mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{u}],\ \nabla\mathbf{u} = 0,$$

$$(\mathbf{u})_S = 0,\ (\mathbf{u})_\Sigma = \mathbf{v}_\Sigma,\ (\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^*)_S = \mathrm{const},$$

где $\mathbf{v}$ и p — соответственно поля скоростей и давлений в потоке жидкости; $\mathbf{u}$ и q — некоторые вспомогательные векторная и скалярная функции; S — поверхность оптимального тела; Σ — внешняя граница рассматриваемого объема жидкости, на которой задано распределение скоростей $\mathbf{v}_\Sigma$; $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\Omega}^* = \mathbf{rot}\,\mathbf{u}$. Пусть поверхность тела S описывается уравнениями в параметрической форме $x_i = x_i(r,\ t)$. Поскольку задача оптимизации решается при изопериметрическом условии постоянства объема, функции $x_i(r, t)$ должны удовлетворять равенству

$$\int\limits_S n_i x_i(r, t)\, dS = 1,$$

где n_i — компоненты внешней нормали к поверхности S.

Краевая задача (1.1) зависит от параметра Re (число Рейнольдса), и, следовательно, форма оптимального тела также зависит от числа Рейнольдса. Пусть поверхность тела S_0, оптимального в стоксовом приближении ($\mathrm{Re} = 0$), описывается уравнениями $x_i = x_{0i}(r, t)$. Предположим, что уравнение поверхности тела S_{Re}, оптимального при ненулевом числе Рейнольдса, может быть представлено в виде

$$x_i = x_i(r, t, \mathrm{Re}) = x_{0i}(r, t) + n_i[\mathrm{Re} f_1(r, t) + \mathrm{Re}^2 f_2(r, t) + \dots]. \tag{1.2}$$

Разложение (1.2) возможно в случае, когда поверхность S_0 гладкая. Если на поверхности S_0 есть критические точки (точки ветвления линий тока), то в окрестности этих точек поверхность S_0 имеет форму конуса с углом при вершине 120° [5]. Если доопределить поверхность, определяемую уравнениями (1.2), конусом с углом при вершине 120°, то, как показано в работе [5], в окрестности критической точки уравнения, граничные условия и условия оптимальности будут удовлетворены с точностью до $O(\mathrm{Re}^4 f_1^{\varepsilon}(r_0, t_0))$, где r_0, t_0—значения параметров r и t, отвечающие критической точке.

Пусть функции $\mathbf{v}$, p, $\mathbf{u}$, q удовлетворяют краевой задаче (1.1) с граничными условиями. выставленными на поверхности S_{Re}. Разложим их по степеням Re

$$\begin{gathered}\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathrm{Re}\mathbf{v}_1 + \mathrm{Re}^2\mathbf{v}_2 + \dots,\quad p = p_0 + \mathrm{Re} p_1 + \mathrm{Re}^2 p_2 + \dots,\\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathrm{Re}\mathbf{u}_1 + \mathrm{Re}^2\mathbf{u}_2 + \dots,\quad q = q_0 + \mathrm{Re} q_1 + \mathrm{Re}^2 q_2 + \dots\end{gathered} \tag{1.3}$$

Подставляя разложения (1.3) в краевую задачу (1.1), снося граничные условия с поверхности S_{Re} на поверхность S_0 с учетом (1.2) и раскладывая изопериметрическое условие по степеням Re, получим последовательность краевых задач для определения функций f_i, $\mathbf{v}_i$, p_i, $\mathbf{u}_i$, q_i. В нулевом приближении имеем

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{v}_0 - \nabla p_0 = 0,\ \nabla\mathbf{v}_0 = 0,\ (\mathbf{v}_0)_{S_0} = 0,\ (\mathbf{v}_0)_\Sigma = \mathbf{v}_\Sigma,\\ \Delta\mathbf{u}_0 - \nabla q_0 = 0,\ \nabla\mathbf{u}_0 = 0,\ (\mathbf{u}_0)_{S_0} = 0,\ (\mathbf{u}_0)_\Sigma = \mathbf{v}_\Sigma,\\ (\Omega_0\Omega_0^*)_{S_0} = C_0,\quad \int\limits_{S_0} x_{0i} n_i\, dS = 1\end{gathered} \tag{1.4}$$

(постоянная C_0 определяется из изопериметрического условия). Краевые задачи для функций $\mathbf{v}_0$, p_0 и $\mathbf{u}_0$, q_0 совпадают, и поэтому $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0$, $q_0 = p_0 + \mathrm{const}$, $\Omega_0 = \Omega_0^*$. В этом случае краевая задача эквивалентна задаче, сформулированной в работе [2] для приближения Стокса.

Для первого приближения по Re задача (1.1) приводится к виду

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{v}_1 - \nabla p_1 = (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0,\ \nabla\mathbf{v}_1 = 0,\\ \Delta\mathbf{u}_1 - \nabla q_1 = \mathbf{v}_0\nabla\mathbf{v}_0 - (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_0,\ \nabla\mathbf{u}_1 = 0,\\ (\mathbf{u}_1)_\Sigma = (\mathbf{v}_1)_\Sigma = 0,\ (\mathbf{v}_1)_{S_0} = (\mathbf{u}_1)_{S_0} = -f_1\frac{\partial\mathbf{v}_0}{\partial n},\\ \left(\Omega_0\Omega_1^* + \Omega_1\Omega_0 + f_1\frac{\partial}{\partial n}\Omega_0^2\right)_{S_0} = 2C_1,\quad \int\limits_{S_0} f_1\, ds = 0.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Уменьшим число неизвестных функций в задаче (1.5), для чего сложим уравнения для $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{u}_1$ и перейдем к обозначениям

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1), \quad s_1 = \frac{1}{2}\left(p_1 + q_1 + \frac{v_0^2}{2}\right), \quad \omega_1 = \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_1^*),$$

имеем

$$\Delta \mathbf{w}_1 - \nabla s_1 = 0, \ \nabla \mathbf{w}_1 = 0, \tag{1.6}$$
$$(\mathbf{w}_1)_\Sigma = 0, \quad (\mathbf{w}_1)_{S_0} = -f_1 \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{n}},$$
$$\left(\Omega\omega_{01} + f_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Omega_0^2\right)_{S_0} = C_1, \quad \int\limits_{S_0} f_1 dS = 0.$$

Можно заметить, что, поскольку постоянная C_1 определяется из изопериметрического условия, функции $\mathbf{w}_1$ и f_1 входят в краевую задачу (1.6) однородно и, следовательно, задача (1.6) имеет тривиальное решение $\mathbf{w}_1 = 0$, $f_1 \equiv 0$. Отсюда, в частности, следует, что $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{v}_1$, $\Omega_1^* = -\Omega_1$.

Во втором приближении по Re задача (1.1) примет вид

$$\Delta \mathbf{v}_2 - \nabla p_2 = (\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_1, \ \nabla \mathbf{v}_2 = 0,$$
$$\Delta \mathbf{u}_2 - \nabla q_2 = (\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0\nabla\mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1\nabla\mathbf{v}_0, \ \nabla \mathbf{u}_2 = 0,$$
$$(\mathbf{v}_2)_\Sigma = (\mathbf{u}_2)_\Sigma = 0, \ (\mathbf{v}_2)_{S_0} = (\mathbf{u}_2)_{S_0} = -f_2 \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{n}},$$
$$\left(\Omega_2\Omega_0 + \Omega_0\Omega_2^* - 2\Omega_1^2 + f_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Omega_0^2\right)_{S_0} = 2C_2, \ \int\limits_{S_0} f_2 dS = 0.$$

Здесь учтено, что $f_1 \equiv 0$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{u}_1$. Уменьшим количество уравнений и неизвестных функций, сложив уравнения для $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{u}_2$, и перейдем к обозначениям

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2), \ s_2 = \frac{1}{2}[p_2 + q_2 - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0], \ \omega_2 = \frac{1}{2}(\Omega_2 + \Omega_2^*),$$

имеем

$$\Delta \mathbf{w}_2 - \nabla s_2 = (\mathbf{v}_0\nabla)\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0\nabla\mathbf{v}_1, \quad \nabla \mathbf{w}_2 = 0, \tag{1.7}$$
$$(\mathbf{w}_2)_{S_0} = -f_2 \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{n}}, \quad (\mathbf{w}_2)_\Sigma = 0,$$
$$\left(\Omega_0\omega_2 - \Omega_1^2 + f_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Omega_0^2\right)_{S_0} = C_2, \ \int\limits_{S_0} f_2 dS = 0.$$

2. Пусть на поверхности Σ задан равномерный поступательный поток $\mathbf{v}_\Sigma = \mathrm{const}$, направленный вдоль оси x, поверхность Σ симметрична относительно плоскости yz и миделево сечение тела S_0, оптимального в стоксовом приближении, проходит через начало координат. В этом случае задача для определения формы S_0 допускает решение, симметричное относительно плоскости yz. Покажем, что в случае, если поверхность S_0 симметрична относительно плоскости yz, функция f_2, определяемая при решении задачи (1.7), будет четной функцией координаты x и, следовательно, тело, оптимальное при ненулевых числах Рейнольдса, с точностью до чле-

нов порядка $O(\mathrm{Re}^3)$ также будет симметричным относительно плоскости yz. Введем обозначения

(2.1)

$$v_{ix}^{+}=\frac{1}{2}[v_{ix}(x,y,z)+v_{ix}(-x,y,z)],\ v_{ix}^{-}=\frac{1}{2}[v_{ix}(x,y,z)-v_{ix}(-x,y,z)],$$

$$v_{iy}^{+}=\frac{1}{2}[v_{iy}(x,y,z)-v_{iy}(-x,y,z)],\ v_{iy}^{-}=\frac{1}{2}[v_{iy}(x,y,z)+v_{iy}(-x,y,z)],$$

$$v_{iz}^{+}=\frac{1}{2}[v_{iz}(x,y,z)-v_{iz}(-x,y,z)],\ v_{iz}^{-}=\frac{1}{2}[v_{iz}(x,y,z)+v_{iz}(-x,y,z)],$$

$$p_i^{+}=\frac{1}{2}[p_i(x,y,z)-p_i(-x,y,z)],\ p_i^{-}=\frac{1}{2}[p_i(x,y,z)+p_i(-x,y,z)],$$

$$f_i^{+}=\frac{1}{2}[f_i(x,t)+f_i(-x,t)],\ f_i^{-}=\frac{1}{2}[f_i(x,t)-f_i(-x,t)].$$

Здесь предполагается, что поверхность тела S_0 определена уравнениями вида $y=y(x,t)$, $z=z(x,t)$. После подстановки выражений (2.1) в краевые задачи (1.4), (1.5) можно получить $\mathbf{v}_0^{-}=\mathbf{v}_1^{+}=0$. Подставляя далее (2.1) в задачу (1.7) и учитывая, что $\mathbf{v}_0^{-}=\mathbf{v}_1^{+}=0$, получим

$$\Delta\mathbf{w}_2^{+}-\nabla s_2^{+}=(\mathbf{v}_0^{+}\nabla)\mathbf{v}_1^{-}+\mathbf{v}_0^{+}\nabla\mathbf{v}_1^{-},\quad \mathbf{w}_2^{+}=0,$$

$$(\mathbf{w}_2^{+})_\Sigma=0,\ (\mathbf{w}_2^{+})_{S_0}=-f_2^{+}\frac{\partial\mathbf{v}_0^{+}}{\partial\mathbf{n}},$$

$$\left[\Omega_0^{+}\omega_2^{+}-(\Omega_1^{-})^2+f_2^{+}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\Omega_0^{+})^2\right]_{S_0}=C_2^{+},$$

$$\Delta\mathbf{w}_2^{-}-\nabla s_2^{-}=0,\ \nabla\mathbf{w}_2^{-}=0,\ (\mathbf{w}_2^{-})_\Sigma=0,\ (\mathbf{w}_2^{-})_{S_0}=-f_2^{-}\frac{\partial\mathbf{v}_0^{+}}{\partial\mathbf{n}},$$

$$\left[\Omega_0^{+}\omega_2^{-}+f_2^{-}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\Omega_0^{+})^2\right]_{S_0}=C_2^{-},$$

где функции с индексами $+$ и $-$ определены аналогично функциям $\mathbf{v}_i^{+}$, $\mathbf{v}_i^{-}$, p_i^{+}, p_i^{-}; C_2^{+} и C_2^{-}—постоянные, определяемые из изопериметрического условия. Так как f_2^{-} — нечетная функция координаты x, то должны выполняться равенства

$$\int\limits_{S_0} f_2^{-}dS=0,\quad \int\limits_{S_0} f_2^{+}dS=0.$$

Можно заметить, что краевая задача для функций $\mathbf{w}_2^{-}$, s_2^{-}, f_2^{-} однородная и, следовательно, имеет тривиальное решение $\mathbf{w}_2^{-}\equiv 0$, $f_2^{-}\equiv 0$. Таким образом, доказано, что краевая задача (1.7) имеет решение, симметричное относительно плоскости yz.

3. В качестве минимизируемого функционала G в работах [4, 5] рассматривалась скорость диссипации энергии во всем исследуемом объеме жидкости, т. е.

$$G(S)=\int\limits_V\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 dV.$$

Этот функционал зависит от формы тела и числа Рейнольдса как от параметра. Пусть поверхность некоторого тела S описывается уравнениями $x_i=$

$=X_i(r,\ t)$. Рассмотрим семейство тел S_Σ, поверхность которых описывается уравнениями $x_i = X_i(r,\ t) + \varepsilon n_i f(r,\ t)$, где ε — некоторый параметр; $f(r,\ t)$ — фиксированная функция. Тогда значения функционала на этом семействе будут представлять собой функцию двух переменных $G(S_\Sigma,\ \mathrm{Re}) = g(\varepsilon,\ \mathrm{Re})$. Разложим функцию $g(\varepsilon,\ \mathrm{Re})$ в ряд Тэйлора в окрестности точки $\varepsilon = 0$, $\mathrm{Re} = 0$. Имеем

$$g(\varepsilon,\ \mathrm{Re}) = g(0,\ 0) + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} + \mathrm{Re}\frac{\partial g}{\partial\,\mathrm{Re}} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon^2} + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}\frac{\partial^2 g}{\partial\varepsilon\partial\,\mathrm{Re}} + \mathrm{Re}^2\frac{\partial^2 g}{\partial\,\mathrm{Re}^2}\right) + \ldots$$

Здесь все производные вычисляются в точке $\varepsilon = 0$, $\mathrm{Re} = 0$. Если $X_i(r,\ t) = x_{0i}(r,\ t)$, то из условия оптимальности следует, что $\partial g/\partial\varepsilon = 0$. Далее, поскольку тело, оптимальное в стоксовом приближении, является оптимальным и в первом приближении по числу Рейнольдса, $\partial/\partial\mathrm{Re}(\partial g/\partial\varepsilon) = 0$. Таким образом, при вариациях поверхности S_0 вклад в функционал равен $(1/2)\varepsilon^2\partial^2 g/\partial\varepsilon^2$. Положив теперь $\varepsilon = \mathrm{Re}^2$, $f(r,\ t) = f_2(r,\ t)$, получим, что семейство поверхностей S_Σ с точностью до $O(\mathrm{Re}^3)$ совпадает с семейством оптимальных тел, поэтому при малых числах Рейнольдса вклад от оптимизации имеет порядок $O(\varepsilon^2) = O(\mathrm{Re}^4)$, и, следовательно, тело, оптимальное в стоксовом приближении, с большой степенью точности можно считать оптимальным и при малых числах Рейнольдса.

Рассмотрим два тела S и $S_1 \supseteq S$. Покажем, что с точностью до $O(\mathrm{Re}^2)$ тело S_1 имеет сопротивление большее, чем тело S. Рассмотрим для этого однопараметрическое семейство тел $S(\alpha)$, описываемых уравнениями $x_i = x_i(r,\ t,\ \alpha)$, такое, что $S(0) = S$, $S(1) = S_1$ и для любого $\delta > 0 S(\alpha + \delta) \supseteq S(\alpha)$. На этом семействе тел функционал будет функцией одной переменной α: $G(S(\alpha)) = g(\alpha)$. Из выражения для первой вариации функционала G [4, 5] следует

$$\frac{\partial g}{\partial\alpha} = \int\limits_{S(\alpha)} f\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}\right) dS, \quad f = n_i\frac{\partial x_i}{\partial\alpha}.$$

Раскладывая функции $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ по степеням Re, получим

$$\frac{\partial g}{\partial\alpha} = \int\limits_{S(\alpha)} f\left[\left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{n}}\right)^2 + \mathrm{Re}\left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{n}}\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}}\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{n}}\right)\right] dS + O(\mathrm{Re}^2).$$

Функции $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{v}_1$ должны удовлетворять нулевым граничным условиям. Поэтому, как видно из уравнений (1.4), (1.5), $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0$, $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{v}_1$ и, следовательно,

$$\frac{\partial g}{\partial\alpha} = \int\limits_{S(\alpha)} f\left(\frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{n}}\right)^2 dS + O(\mathrm{Re}^2).$$

Поскольку при $\delta > 0$ $S(\alpha + \delta) \supseteq S(\alpha)$, то $f \geqslant 0$, и поэтому $\partial g/\partial\alpha \geqslant 0$, а так как g — монотонная функция, то $g(0) \leqslant g(1)$. Таким образом, доказано, что любое тело, содержащее данное, с точностью до членов порядка $O(\mathrm{Re}^2)$ имеет сопротивление большее, чем данное тело.

4. В проведенных выше рассуждениях существенно использовано наличие конечной внешней поверхности Σ, так как разложения (1.3) пригодны лишь при условии $\mathrm{Re}\,x_i \ll 1$. В случае бесконечной области разложения вида (1.3) необходимо сшивать с внешним разложением Озеена

($\mathrm{Re} \to 0$ при $\xi_i = \mathrm{Re}\, x_i$ фиксированном), заменяя граничные условия на поверхности Σ на соответствующие условия сшивки. В этом случае так же, как и в случае конечной области, удается показать, что функция $f_1 \equiv 0$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Действительно, переходя к переменным $\xi_i = \mathrm{Re}\, x_i$ и считая, что на бесконечности задан равномерный поступательный поток $\mathbf{v}_\infty = \mathrm{const}$, получим систему уравнений и граничных условий для функций внешнего разложения

$$(4.1)\qquad \begin{gathered} \Delta_\xi \mathbf{v}_\xi - \nabla_\xi p = \mathrm{Re}(\mathbf{v}_\xi \nabla_\xi)\mathbf{v}_\xi, \quad \nabla_\xi \mathbf{v}_\xi = 0, \\ \Delta_\xi \mathbf{u}_\xi - \nabla_\xi q = \mathrm{Re}\,[\mathbf{u}_\xi\, \nabla_\xi \mathbf{v}_\xi - (\mathbf{v}_\xi \nabla_\xi)\mathbf{u}_\xi], \quad \nabla_\xi \mathbf{u}_\xi = 0, \\ (\mathbf{v}_\xi)_\infty = (\mathbf{u}_\xi)_\infty = (1/\mathrm{Re})\mathbf{v}_\infty \end{gathered}$$

(индекс ξ означает, что соответствующие компоненты векторов вычислены в координатах ξ_i). Считая Re малым, разложим функции $\mathbf{v}_\xi$, p, $\mathbf{u}_\xi$, q по степеням Re. Поскольку граничное условие на бесконечности имеет порядок Re^{-1}, разложение функций $\mathbf{v}_\xi$, p, $\mathbf{u}_\xi$, q будем начинать с членов порядка Re^{-1}

$$(4.2)\qquad \begin{gathered} \mathbf{v}_\xi = \frac{1}{\mathrm{Re}}\mathbf{v}_\xi^0 + \mathbf{v}_\xi^1 + o(1), \quad p = \frac{1}{\mathrm{Re}} p^0 + p^1 + o(1), \\ \mathbf{u}_\xi = \frac{1}{\mathrm{Re}}\mathbf{u}_\xi^0 + \mathbf{u}_\xi^1 + o(1), \quad q = \frac{1}{\mathrm{Re}} q^0 + q^1 + o(1). \end{gathered}$$

Подставляя разложение (4.2) в уравнения и краевые условия (4.1), приравнивая коэффициенты при равных степенях Re и выписывая условие сшивки с внутренним разложением (1.3), получим последовательность краевых задач для определения функций $\mathbf{v}_\xi^i$, p^i, $\mathbf{u}_\xi^i$, q^i. Можно убедиться, что решением для функций $\mathbf{v}_\xi^0$ и $\mathbf{u}_\xi^0$ будет $\mathbf{v}_\xi^0 = \mathbf{u}_\xi^0 = \mathbf{v}_\infty$. Для функций первого приближения $\mathbf{v}_\xi^1$, p^1, $\mathbf{u}_\xi^1$, q^1 уравнения (4.1) превращаются в уравнения Озеена

$$\Delta_\xi \mathbf{v}_\xi^1 - \nabla_\xi p^1 = (\mathbf{v}_\infty \nabla_\xi)\mathbf{v}_\xi^1, \quad \Delta_\xi \mathbf{u}_\xi^1 - \nabla_\xi q^1 = -(\mathbf{v}_\infty \nabla_\xi)\mathbf{u}_\xi^1, \quad \nabla_\xi \mathbf{u}_\xi^1 = \nabla_\xi \mathbf{v}_\xi^1 = 0.$$

Вместо того, чтобы сшивать функции $\mathbf{v}_\xi^1$, p^1, $\mathbf{u}_\xi^1$, q^1 с соответствующими функциями разложения (1.3), будем сшивать функции $\mathbf{w}_\xi^1 = (\mathbf{v}_\xi^1 + \mathbf{u}_\xi^1)/2$, $s^1 = (p^1 + q^1 + v_\infty^2/2)/2$ с функциями $\mathbf{w}_1$, s_1. Для $\mathbf{w}_\xi^1$, s^1 имеем уравнения Стокса

$$(4.3)\qquad \Delta_\xi \mathbf{w}_\xi^1 - \nabla_\xi s^1 = 0, \quad \nabla_\xi \mathbf{w}_\xi^1 = 0, (\mathbf{w}^1)_\infty = 0.$$

Условие сшивки в этом случае имеет вид

$$(4.4)\qquad \lim_{\mathrm{Re}\to 0} \mathbf{w}_x^1 = \lim_{\mathrm{Re}\to 0} \mathbf{w}_1$$

(x_i и ξ_i фиксированы).

Можно убедиться, что решением задачи (1.6), (4.3) при условии сшивки (4.4) будет $f_1 \equiv 0$, $\mathbf{w}_1 \equiv 0$, $\mathbf{w}_\xi^1 \equiv 0$. Таким образом, видно, что в случае бесконечной области на теле S_0, оптимальном при нулевых числах Рейнольдса, необходимые условия оптимальности выполняются с точностью до $o(\mathrm{Re})$. Во втором приближении для $\mathbf{v}$ в результате сшивки разложения (1.3) с разложением Озеена возникнут члены порядка $v_2 = O(\ln \mathrm{Re})$ (см., например, [6]), и поэтому функция f_2 также будет иметь порядок $f_2 = O(\ln \mathrm{Re})$. Такие же члены возникнут и в функционале G. В этом случае, проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям п. 3, можно показать, что выигрыш по функционалу в результате оптимизации имеет порядок $o(\mathrm{Re}^3)$.

Поступила 3 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сиразетдинов Т. К.** Оптимальные задачи газодинамики.— «Изв. высш. учеб. заведений. Авиационная техника», 1963, № 2.
2. **Pironneau O.** On optimum profiles in Stokes flow.— «J. Fluid Mech.», 1973, vol. 51, N 1, p. 117.
3. **Bourot J.-M.** On the numerical computation of the optimum profile in Stokes flow.— «J. Fluid Mech.», 1974, vol. 65, N 3, p. 513.
4. **Pironneau O.** On the optimum design in fluid mechanics.— «J. Fluid Mech.», 1974, vol. 64, N 1, p. 97.
5. **Миронов А. А.** К задаче оптимизации формы тела в вязкой жидкости.— ПММ, 1975, т. 39, № 1, с. 103.
6. **Proudman I., Pearson J. R. A.** Expansions at small Reynolds number.— «J. Fluid Mech.», 1957, vol. 9, N 4, p. 593.

УДК 517.9 : 536.2

О ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕ В ЛАМИНАРНОЙ ПРИСТЕННОЙ СТРУЕ

К. Б. Павлов, Л. Д. Покровский

(Москва)

Рассмотрение задач о нагревании сред в рамках линейной теории теплопроводности становится некорректным, если изменение температуры происходит в широких пределах, и это приводит к необходимости учета зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. Например, подобная зависимость имеет место, когда в механизме теплопередачи существенную роль играет лучистый теплообмен [1].

Если коэффициент теплопроводности зависит от температуры по степенному закону, то распространение тепловых возмущений в среде с нулевой температурой происходит с конечной скоростью движения фронта тепловой волны [1]. Если к тому же в указанной среде имеются тепловые стоки, то фронт тепловой волны может оставаться неподвижным относительно источника тепловых возмущений [2]. Ниже показывается, что аналогичное явление пространственной локализации тепловых возмущений может быть обнаружено также при решении задач стационарного температурного пограничного слоя;этот факт обусловливается совместным влиянием степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и движением среды.

Рассмотрим задачу о стационарном распределении температуры в затопленной ламинарной струе, распространяющейся вдоль твердой плоской нагретой поверхности, температура которой $T_w = \mathrm{const} > 0$. Пусть плоская струя жидкости, имеющей температуру $T = 0$, выходит в направлении оси x из узкой щели $x = 0$, $y = 0$ в полупространство $y > 0$, заполненное той же жидкостью (фиг. 1). Предполагается, что теплопроводность жидкости зависит от температуры по степенному закону, а остальные параметры жидкости постоянны.