УДК 517.9

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ЛАГРАНЖЕВЫХ КООРДИНАТАХ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Ч. Каевмани, С. В. Мелешко*

Нарисуонский университет, 65000 Питсанулок, Таиланд
* Математический колледж Технологического университета им. Суранари, 30000 Накхон Ратчасима, Таиланд
E-mails: chompitk@nu.ac.th, sergey@math.sut.ac.th

Проведен групповой анализ уравнения второго порядка, включающего в качестве частного случая одномерные уравнения газовой динамики в лагранжевых координатах. Применение лагранжевых координат позволило рассматривать одномерные уравнения газовой динамики как вариационное уравнение Эйлера — Лагранжа с подходящим лагранжианом. С использованием вариационного представления и теоремы Нетер построены законы сохранения. Получена полная групповая классификация уравнения Эйлера — Лагранжа, позволившая выделить 18 различных классов.

Ключевые слова: групповой анализ, уравнения газовой динамики, лагранжевы координаты, групповая классификация, законы сохранения.

DOI: 10.15372/PMTF20200205

Введение. Для одномерных уравнений газовой динамики известны четыре закона сохранения: массы, импульса, энергии и центра масс. При использовании лагранжевых координат эти законы сохранения являются следствием симметрий, соответствующих сдвигам по времени и пространству, и симметрии, соответствующей преобразованиям Галилея [1]. Произвольный вид уравнения состояния приводит к наличию произвольной функции в уравнениях газовой динамики, что в свою очередь приводит к расширению допустимой группы. Несмотря на то что свойства уравнений газовой динамики достаточно изучены, их исследование продолжает представлять интерес. Одним из направлений исследований является поиск законов сохранения, в том числе с использованием теоремы Нетер.

Теорема Нетер, являющаяся фундаментальной теоремой, позволяет связать симметрии физической системы с лагранжианом и законами сохранения для соответствующих уравнений Эйлера — Лагранжа [2]. Во многих работах теорема Нетер используется для вывода законов сохранения не только дифференциальных уравнений, но и разностных [3–6]. В [4] использовались симметрии уравнений магнитной гидродинамики и газовой динамики в эйлеровых переменных. С использованием теоремы Нетер были построены соответствующие законы сохранения в эйлеровом и лагранжевом виде. Авторы [5] иссле-

Работа выполнена при финансовой поддержке Исследовательского фонда Нарисуонского университета, а также Российского научного фонда (грант № 18-11-00238 "Уравнения гидродинамического типа: симметрии, законы сохранения, инвариантные разностные схемы").

довали законы сохранения, связанные с растяжениями одномерных уравнений идеальной газодинамики. В работе [7] показано, что новые законы сохранения одномерной газовой динамики можно получить из нелокальных симметрий. В [6] использовалось представление Клебша для формирования законов сохранения в простой форме.

В настоящей работе рассматривается класс моделей, которые можно получить с помощью подхода, разработанного в [8, 9], где изучались уравнения вида

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}(u) = 0, \qquad \rho\dot{u} + \nabla p = 0, \qquad \dot{S} = 0, \qquad p = \rho\frac{\delta W}{\delta \rho} - W. \tag{1}$$

Здесь ∇ — градиент относительно пространственных переменных; ρ — плотность; u — поле скоростей; p — давление; S — энтропия; W — заданный потенциал; знак “$\cdot$” обозначает материальную производную по времени: $\dot{f} = df/dt = f_t + u\nabla f$; t — время; $\delta W/\delta\rho$ — вариационная производная от W по ρ при фиксированном значении u. Класс дисперсионных моделей (1) является примером сред, поведение которых зависит не только от термодинамических переменных, но и от их производных по пространству и времени. Одним из примеров таких моделей являются уравнения Серра — Су — Гарднера — Грин — Нагхди с функцией $W(\rho, \dot{\rho})$, исследование которых в лагранжевых координатах проведено в [10].

Уравнения газовой динамики являются частным случаем класса моделей (1), где $W = W(\rho, S)$.

Для одномерных уравнений газовой динамики имеем

$$\rho(u_t + uu_x) + p_x = 0, \qquad \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \qquad S_t + uS_x = 0, \tag{2}$$

где $p(\rho, S) = \rho W_\rho - W$. Используя лагранжиан

$$L = \rho u^2/2 - W,$$

уравнение (2) в массовых лагранжевых координатах $(t, \boldsymbol{X})$ $(x = \varphi(t, \boldsymbol{X}))$ сводится к уравнению [11, 12]

$$\varphi_{tt} = D_{\boldsymbol{X}} p. \tag{3}$$

Уравнение (3) является уравнением Эйлера — Лагранжа для экстремалей функционала вида $\displaystyle\iint L\,dt\,d\boldsymbol{X}$. Это свойство уравнения (3) позволяет рассматривать некоторые краевые задачи одномерной газовой динамики как задачи вариационного исчисления.

Целью настоящей работы является получение законов сохранения уравнения (3), где $p = p(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}})$ $(p_{\boldsymbol{X}} \neq 0)$. Поскольку уравнение (3) является уравнением Эйлера — Лагранжа с подходящим лагранжианом, используются лагранжевы координаты. С помощью метода группового анализа [13] находится допустимая группа Ли уравнения Эйлера — Лагранжа, с использованием допустимых операторов проверяется инвариантность вариационного интеграла относительно действия этой допустимой симметрии [14, 15]. Наконец, с использованием теоремы Нетер [2] получаются законы сохранения.

Групповые свойства уравнения вида (3), где $p = p(\boldsymbol{X}, \varphi, \varphi_{\boldsymbol{X}})$, изучались во многих работах. В [16] представлен ряд уравнений, поиск решений которых можно свести к решению квазилинейного волнового уравнения $\varphi_{tt} = [f(\varphi)\varphi_{\boldsymbol{X}}]_{\boldsymbol{X}}$, где $f' \neq 0$. Среди таких уравнений уравнения мелкой воды, конечной нелинейной струны, упругопластических материалов. Для случая политропного газа $(p = -b(\boldsymbol{X})\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}$, $\gamma > 1)$ групповая классификация уравнения (3) проведена в [17]. В [18, 19] уравнение (3) исследовалось при $p = -c(\boldsymbol{X})\varphi_{\boldsymbol{X}}$. В [1] с помощью теоремы Нетер получены законы сохранения одномерных уравнений газовой динамики политропного газа в лагранжевых координатах, в [20] исследованы модели с лагранжианом вида $\varphi_t^2/2 + g(\varphi_{\boldsymbol{X}}) + h(\varphi)$.

Заметим, что во всех указанных выше работах для уравнений газовой динамики симметрия уравнения (3) изучалась только для частных случаев функции $p = -b(X)\varphi_X^\gamma$ при $\gamma > 1$ или $\gamma = 1$ (газ Чаплыгина, в случае если $b(X) = \mathrm{const}$). В настоящей работе проводится полная групповая классификация уравнения (3) с произвольной функцией $p = p(X, \varphi_X)$ ($p_X \neq 0$).

1. Теорема Нетер. Пусть выражение

$$Y = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \zeta_{i_1 i_2}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} + \ldots$$

является оператором Ли — Бэклунда и $F = F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$. Здесь $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — независимые переменные; $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$ — зависимые переменные; $\boldsymbol{p}$ — производные переменных $u_{i_1,\ldots,i_s}^\alpha$ до конечного порядка. Продолжения операторов определяются по классическим формулам [13]

$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j), \qquad \zeta_{i_1 i_2}^\alpha = D_{i_2} D_{i_1}(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_{i_2} D_{i_1}(\xi^j) - u_{j i_1}^\alpha D_{i_2}(\xi^j),$$

$$\zeta_{i_1,\ldots,i_s}^\alpha = D_{i_1} \cdots D_{i_s}(W^\alpha) + \xi^j u_{j i_1,\ldots,i_s}^\alpha, \qquad s = 1, 2, \ldots,$$

где D_i — полные производные по x^i:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{i i_1}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1}^\alpha} + u_{i i_1 i_2}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} + \ldots, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема Нетер основана на двух тождествах. Первое тождество называется тождеством Нетер [14]

$$YF + FD_i(\xi^i) = W^\alpha \frac{\delta F}{\delta u^\alpha} + D_i(N^i F), \tag{4}$$

где оператор

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s \geqslant 1} (-1)^s D_{i_1} \cdots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1,\ldots,i_s}^\alpha} \tag{5}$$

представляет собой вариационные производные. Функции $W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha$ называются характеристическими функциями, оператор N^i задается следующим образом:

$$N^i F = \xi^i F + W^\alpha \frac{\delta F}{\delta u_i^\alpha} + \sum_{s \geqslant 1} D_{i_1} \cdots D_{i_s}(W^\alpha) \frac{\delta F}{\delta u_{i i_1 i_2,\ldots,i_s}^\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь вариационные производные $\delta F / \delta u_{i i_1 i_2,\ldots,i_s}^\alpha$ получаются из (5) путем замены u^α на соответствующие производные $u_{i_1 i_2,\ldots,i_s}^\alpha$.

Теорема 1 (теорема Нетер). *Если оператор Y допускается уравнениями Эйлера — Лагранжа*

$$\frac{\delta F}{\delta u^\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, m \tag{6}$$

и удовлетворяет условию

$$YF + FD_i(\xi^i) = 0, \tag{7}$$

то координаты вектора $\boldsymbol{C} = (C^1, \ldots, C^n)$ ($C^i = N^i F$) удовлетворяют закону сохранения

$$D_i(C^i) = 0$$

уравнений (6), *где*

$$C^i = \xi^i L + W^\alpha \Big[\frac{\partial L}{\partial u^\alpha_i} - D_j\Big(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{ij}}\Big) + D_j D_k\Big(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{ijk}}\Big) - \ldots\Big] +$$
$$+ D_j(W^\alpha)\Big[\frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{ij}} - D_k\Big(\frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{ijk}}\Big) + \ldots\Big] + D_j D_k(W^\alpha)\Big[\frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{ijk}} - \ldots\Big].$$

Замечание. Если условие инвариантности (7) заменить условием

$$YF + FD_i\xi^i = D_i B^i \tag{8}$$

с некоторыми функциями $B^i = B^i(x,u,p)$, то из тождества Нетер (4) следует закон сохранения, где

$$C^i = N^i F - B^i, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Симметрия Y, удовлетворяющая условию (7), называется вариационной симметрией, тогда как симметрия, удовлетворяющая условию (8), называется дивергентной.

Вторым тождеством, на котором основана теорема Нетер, является тождество [21, 22]

$$\frac{\delta}{\delta u^j}\,(YF + FD_i\xi^i - D_iB^i) = Y\Big(\frac{\delta F}{\delta u^j}\Big) + \frac{\delta F}{\delta u^k}\Big(\frac{\partial \eta^k}{\partial u^j} - \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j}\,u^k_i + \delta_{kj}D_i\xi^i\Big),$$
$$j = 1,2,\ldots,m.$$

Теорема 2 [21, 22]**.** *Предположим, что оператор*

$$Y = \xi^i(x,u)\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x,u)\,\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

удовлетворяет условию (8)*. Тогда оператор Y допускается системой* (6)*.*

2. Уравнение Эйлера — Лагранжа в лагранжевых координатах. Приведем соотношения между лагранжевыми и эйлеровыми координатами.

2.1. *Лагранжевы координаты.* Пусть $D(t)$ — область, занятая средой в момент времени t, в которой координаты частиц в исходном положении принадлежат этой области ($\boldsymbol{X} \in D(t_0)$). Движение континуума определяется как диффеоморфизм φ: $D(t_0) \to D(t)$:

$$x = \varphi(\boldsymbol{X}, t) \in D(t),$$

где функция $\varphi(\boldsymbol{X}, t)$ — решение задачи Коши

$$\varphi_t(\boldsymbol{X}, t) = u(\varphi(\boldsymbol{X}, t), t), \qquad \varphi(\boldsymbol{X}, t_0) = \boldsymbol{X}.$$

В лагранжевых координатах общее решение уравнения закона сохранения массы имеет вид

$$\rho(\boldsymbol{X}, t) = \rho_0(\boldsymbol{X})/\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}, t)$$

($\rho_0(\boldsymbol{X})$ — произвольная функция интегрирования; энтропия S определяется как $S_0(\boldsymbol{X}) = S(\varphi(\boldsymbol{X}, t), t)$). Без ограничения общности можно полагать $\rho_0 = 1$, в этом случае лагранжевы координаты называются массовыми, однако для краткости будем их также называть лагранжевыми. Действительно, используя замену $\bar{\boldsymbol{X}} = g(\boldsymbol{X})$ ($g' = \rho_0$), получаем

$$\rho(\bar{\boldsymbol{X}}, t) = 1/\varphi_{\bar{\boldsymbol{X}}}(\bar{\boldsymbol{X}}, t).$$

Далее черта над $\boldsymbol{X}$ опускается.

2.2. *Уравнения Эйлера — Лагранжа в лагранжевых координатах.* Для уравнений газовой динамики потенциальная функция $W = W(\rho, S)$ такая, что лагранжиан L^L в лагранжевых координатах равен

$$L^L(t, \boldsymbol{X}, \varphi, \varphi_t, \varphi_{\boldsymbol{X}}, S_0(\boldsymbol{X})) = \varphi_t^2/2 - \varphi_{\boldsymbol{X}}^{-1} W(\varphi_{\boldsymbol{X}}^{-1}, S_0(\boldsymbol{X})). \tag{9}$$

Уравнения Эйлера — Лагранжа, соответствующие данному лагранжиану, можно получить, применяя вариационный принцип

$$\frac{\delta L^L}{\delta\varphi} = 0, \tag{10}$$

где вариационная производная имеет вид

$$\frac{\delta}{\delta\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi} - D_t\,\frac{\partial}{\partial\varphi_t} - D_{\boldsymbol{X}}\,\frac{\partial}{\partial\varphi_{\boldsymbol{X}}} + D_t^2\,\frac{\partial}{\partial\varphi_{tt}} + D_tD_{\boldsymbol{X}}\,\frac{\partial}{\partial\varphi_{t\boldsymbol{X}}} + D_{\boldsymbol{X}}^2\,\frac{\partial}{\partial\varphi_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}}} + \ldots$$

(D_t, $D_{\boldsymbol{X}}$ — полные производные по массовым лагранжевым координатам). Операторы полных производных в лагранжевых и эйлеровых координатах имеют вид ($\tilde{t} = t$)

$$D_{\boldsymbol{X}} = \varphi_{\boldsymbol{X}} D_x, \qquad D_t = \varphi_t D_x + D_{\tilde{t}},$$

где D_x, $D_{\tilde{t}}$ — операторы полных производных в эйлеровых координатах.

Уравнение Эйлера — Лагранжа (10) с лагранжианом (9) имеет вид

$$W_{\rho\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}^2 - W_{\rho\rho}\varphi_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}} - W_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}^3 + \varphi_{tt}\varphi_{\boldsymbol{X}}^3 = 0, \tag{11}$$

где $W(\rho, S_0(\boldsymbol{X})) = \tilde{W}(\rho, \boldsymbol{X})$ (далее знак “$\sim$” опускается). Поскольку $p = \rho W_\rho - W$, $\rho = \varphi_{\boldsymbol{X}}^{-1}$, находим $W_{\rho\rho} = p_\rho/\rho$, $W_{\rho\boldsymbol{X}} = (p_{\boldsymbol{X}} + W_{\boldsymbol{X}})/\rho$. Подставляя эти выражения в (11) и учитывая, что $p = P(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}})$, получаем уравнение

$$\varphi_{tt} + P_{\boldsymbol{X}} + P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\varphi_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}} = 0, \tag{12}$$

или

$$\varphi_{tt} + D_{\boldsymbol{X}} P = 0.$$

3. Групповой анализ. Применим метод группового анализа [13] к уравнению

$$\varphi_{tt} + P_{\boldsymbol{X}} + P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\varphi_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}} = 0, \tag{13}$$

где $p = P(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}})$, $P_{\boldsymbol{X}} \neq 0$, $P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}} < 0$.

3.1. *Преобразования эквивалентности.* Преобразования, которые отображают уравнение (13) в уравнение с той же дифференциальной структурой, называются преобразованиями эквивалентности [13]. Используя инфинитезимальный подход [13] с расширением [23], где все коэффициенты оператора зависят от независимых и зависимых переменных и произвольных элементов, получаем следующий базис операторов:

$$X_1^e = \partial_t, \quad X_2^e = \partial_{\boldsymbol{X}}, \quad X_3^e = \partial_\varphi, \quad X_4^e = \partial_P, \quad X_5^e = t\partial_\varphi, \quad X_6^e = \varphi\,\partial_\varphi + P\,\partial_P,$$
$$X_7^e = t\,\partial_t - 2P\,\partial_P, \quad X_8^e = t^2\,\partial_\varphi - 2\boldsymbol{X}\,\partial_P, \quad X_9^e = \boldsymbol{X}\partial_{\boldsymbol{X}} + P\,\partial_P.$$

Группа эквивалентности, соответствующая этим базисным операторам, применяется для упрощения функции $P(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}})$ в процессе групповой классификации:

$$X_1^e\colon\ \bar{t} = t + a; \qquad X_2^e\colon\ \bar{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X} + a; \qquad X_3^e\colon\ \bar{\varphi} = \varphi + a; \qquad X_4^e\colon\ \bar{P} = P + a;$$
$$X_5^e\colon\ \bar{\varphi} = \varphi + ta; \qquad X_6^e\colon\ \bar{\varphi} = \varphi\,\mathrm{e}^a, \quad \bar{P} = P\,\mathrm{e}^a; \qquad X_7^e\colon\ \bar{t} = t\,\mathrm{e}^a, \quad \bar{P} = P\,\mathrm{e}^{-2a};$$
$$X_8^e\colon\ \bar{\varphi} = \varphi + t^2 a, \quad \bar{P} = P - 2a\boldsymbol{X}; \qquad X_9^e\colon\ \bar{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\,\mathrm{e}^a, \quad \bar{P} = P\,\mathrm{e}^a$$

(a — групповой параметр). Для частного случая функции давления

$$P(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}}) = P_1(\boldsymbol{X})(\varphi_{\boldsymbol{X}} + P_2(\boldsymbol{X}))^\gamma + P_3(\boldsymbol{X})$$

имеют место дополнительные преобразования эквивалентности

$$X_{10}^e\colon\ \bar{\varphi} = \varphi\,\mathrm{e}^a, \quad \bar{P}_1 = P_1\,\mathrm{e}^{-(\alpha-1)a}, \quad \bar{P}_2 = P_2\,\mathrm{e}^a, \quad \bar{P}_3 = P_3\,\mathrm{e}^a;$$

$$X_{11}^e\colon\quad \bar t = t\,\mathrm{e}^a,\quad \bar P_1 = P_1\,\mathrm{e}^{-2a},\quad \bar P_3 = P_3\,\mathrm{e}^{-2a};$$

$$X_{12}^e\colon\quad \bar{\boldsymbol X} = \boldsymbol X\,\mathrm{e}^a,\quad \bar P_1 = P_1\,\mathrm{e}^{(\alpha+1)a},\quad \bar P_2 = P_2\,\mathrm{e}^{-a},\quad \bar P_3 = P_3\,\mathrm{e}^{a};$$

$$X_{13}^e\colon\quad \bar\varphi = \varphi + t^2 a,\quad \bar P_3 = P_3 - 2a\boldsymbol X;\qquad X_{14}^e\colon\quad \bar P_3 = P_3 + a;$$

$$X_{15}^e\colon\quad \bar\varphi = \varphi + \zeta(\boldsymbol X)a,\quad \bar P_2 = P_2 - \zeta'(\boldsymbol X)a.$$

Здесь функция $\zeta(\boldsymbol X)$ и постоянная a — произвольные, представлены только изменяемые переменные.

Также имеются две инволюции, одна из которых связана с изменением времени: E_1: $t\to -t$, а другая — с изменением координаты: E_2: $\boldsymbol X\to-\boldsymbol X$ и $\varphi\to-\varphi$.

3.2. *Групповая классификация.* Инфинитезимальный оператор однопараметрической группы Ли, допускаемый уравнением (13), находим в виде

$$Y = \xi^t(t,\boldsymbol X,\varphi)\partial_t + \xi^{\boldsymbol X}(t,\boldsymbol X,\varphi)\partial_{\boldsymbol X} + \eta^\varphi(t,\boldsymbol X,\varphi)\partial_\varphi.$$

Применяя продолженный оператор к уравнению (13), получаем определяющее уравнение

$$\big[\eta^{\varphi tt} + \xi^{\boldsymbol X}P_{\boldsymbol X\boldsymbol X} + \eta^{\varphi\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}\boldsymbol X} + \varphi_{\boldsymbol X\boldsymbol X}\big(\xi^{\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}\boldsymbol X} + \eta^{\varphi\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}\varphi_{\boldsymbol X}}\big) + \eta^{\varphi\boldsymbol X\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}}\big]\big|_{(S)} = 0 \tag{14}$$

(запись “$|_{(S)}$” означает переход к многообразию, определяемому уравнением (13)).

Расщепляя уравнение (14) относительно параметрических производных φ_t, $\varphi_{t\boldsymbol X}$, $\varphi_{\boldsymbol X\boldsymbol X}$, получаем

$$\begin{aligned}&2\varphi_{\boldsymbol X}\eta_{\varphi\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}} + \varphi_{\boldsymbol X}^2\eta_{\varphi\varphi}P_{\varphi_{\boldsymbol X}} + \varphi_{\boldsymbol X}\eta_\varphi P_{\varphi_{\boldsymbol X}\boldsymbol X} - \eta_\varphi P_{\boldsymbol X} + \eta_{tt} + \eta_{\boldsymbol X\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}}\eta_{\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}\boldsymbol X} +\\ &\quad+ 2\xi_t^tP_{\boldsymbol X} - 2\varphi_{\boldsymbol X}^2\xi_{\varphi\boldsymbol X}^{\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}} - \varphi_{\boldsymbol X}^3\xi_{\varphi\varphi}^{\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}} - \varphi_{\boldsymbol X}^2\xi_\varphi^{\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}\boldsymbol X} - \varphi_{\boldsymbol X}\xi_{\boldsymbol X\boldsymbol X}^{\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}} - \varphi_{\boldsymbol X}\xi_{tt}^{\boldsymbol X} +\\ &\qquad+ \varphi_{\boldsymbol X}\xi_\varphi^{\boldsymbol X}P_{\boldsymbol X} - \varphi_{\boldsymbol X}\xi_{\boldsymbol X}^{\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}\boldsymbol X} + \xi^{\boldsymbol X}P_{\boldsymbol X\boldsymbol X} = 0;\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&2\eta_{\varphi t} - 2\varphi_{\boldsymbol X}\xi_{\varphi\boldsymbol X}^tP_{\varphi_{\boldsymbol X}} - \varphi_{\boldsymbol X}^2\xi_{\varphi\varphi}^tP_{\varphi_{\boldsymbol X}} - \varphi_{\boldsymbol X}\xi_\varphi^tP_{\varphi_{\boldsymbol X}\boldsymbol X} - \xi_{\boldsymbol X}^tP_{\varphi_{\boldsymbol X}\boldsymbol X} - \xi_{\boldsymbol X\boldsymbol X}^tP_{\varphi_{\boldsymbol X}} +\\ &\qquad+ 3\xi_\varphi^tP_{\boldsymbol X} - 2\varphi_{\boldsymbol X}\xi_{\varphi t}^{\boldsymbol X} = 0;\end{aligned} \tag{16}$$

$$\eta_{\varphi\varphi} - 2\xi_{\varphi t}^t - \varphi_{\boldsymbol X}\xi_{\varphi\varphi}^{\boldsymbol X} = 0; \tag{17}$$

$$\xi_{\varphi\varphi}^t = 0; \tag{18}$$

$$\varphi_{\boldsymbol X}\xi_\varphi^tP_{\varphi_{\boldsymbol X}} + \xi_{\boldsymbol X}^tP_{\varphi_{\boldsymbol X}} + \xi_t^{\boldsymbol X} = 0; \tag{19}$$

$$\xi_\varphi^{\boldsymbol X} = 0; \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\varphi_{\boldsymbol X}\eta_\varphi P_{\varphi_{\boldsymbol X}\varphi_{\boldsymbol X}} + \eta_{\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}\varphi_{\boldsymbol X}} + 2\xi_t^tP_{\varphi_{\boldsymbol X}} - \varphi_{\boldsymbol X}^2\xi_\varphi^{\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}\varphi_{\boldsymbol X}} - 2\varphi_{\boldsymbol X}\xi_\varphi^{\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}} +\\ &\qquad+ \varphi_{\boldsymbol X}\xi_{\boldsymbol X}^{\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}\varphi_{\boldsymbol X}} + 2\xi_{\boldsymbol X}^{\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}} - \xi^{\boldsymbol X}P_{\varphi_{\boldsymbol X}\boldsymbol X} = 0;\end{aligned} \tag{21}$$

$$\varphi_{\boldsymbol X}\xi_\varphi^tP_{\varphi_{\boldsymbol X}\varphi_{\boldsymbol X}} - 2\xi_\varphi^tP_{\varphi_{\boldsymbol X}} + \xi_{\boldsymbol X}^tP_{\varphi_{\boldsymbol X}\varphi_{\boldsymbol X}} = 0. \tag{22}$$

Расщепляя уравнения (15)–(22) по производным функции P, находим, что базис ядра допустимых алгебр Ли состоит из операторов

$$Y_1 = \partial_t,\qquad Y_2 = \partial_\varphi,\qquad Y_3 = t\,\partial_\varphi.$$

Преобразования, соответствующие оператору Y_3, являются преобразованиями Галилея.

Рассмотрим расширение ядра допустимых алгебр Ли для специальных функций $P(\boldsymbol X,\varphi_{\boldsymbol X})$.

Из уравнений (17), (18), (20) получаем

$$\xi^t(t,\boldsymbol{X},\varphi)=\varphi\xi^t_1(t,\boldsymbol{X})+\xi^t_0(t,\boldsymbol{X}),\qquad \xi^{\boldsymbol{X}}=\xi^{\boldsymbol{X}}(t,\boldsymbol{X}),$$
$$\eta(t,\boldsymbol{X},\varphi)=\varphi^2\xi^t_{1t}(t,\boldsymbol{X})+\varphi\eta^1(t,\boldsymbol{X})+\eta^0(t,\boldsymbol{X}),$$

где $\xi^t_0(t,\boldsymbol{X})$, $\xi^t_1(t,\boldsymbol{X})$, $\xi^t_{1t}(t,\boldsymbol{X})$, $\eta^0(t,\boldsymbol{X})$, $\eta^1(t,\boldsymbol{X})$ — произвольные функции. Дифференцируя уравнения (16), (19) по φ, находим

$$\xi^t_{1\,\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}=0,\qquad \xi^t_{1\,tt}=0.$$

Поскольку $p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ne 0$, имеем $\xi^t_{1\,\boldsymbol{X}}=0$, $\xi^t_1=tk_1+k_2$ (k_1, k_2 — постоянные). Из уравнения (19) следует

$$\xi^{\boldsymbol{X}}_t=-p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\big(\xi^t_{0\,\boldsymbol{X}}+\varphi_{\boldsymbol{X}}(k_1t+k_2)\big).$$

Поскольку $\xi^{\boldsymbol{X}}$ не зависит от $\varphi_{\boldsymbol{X}}$, получаем

$$p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}\big(\xi^t_{0\,\boldsymbol{X}}+k_1t\varphi_{\boldsymbol{X}}+k_2\varphi_{\boldsymbol{X}}\big)+p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\big(k_1t+k_2\big)=0. \qquad (23)$$

Используя линейную комбинацию уравнений (23), (22), находим

$$p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}(k_1t+k_2)=0.$$

Следовательно, $k_1=0$, $k_2=0$ и уравнение (22) принимает вид

$$\xi^t_{0\,\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}=0. \qquad (24)$$

Анализ уравнения (24) проводится для двух случаев: $p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ne 0$ и $p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}=0$. Если $p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}=0$, то $p(\boldsymbol{X},\varphi_{\boldsymbol{X}})=a(\boldsymbol{X})\varphi_{\boldsymbol{X}}+b(\boldsymbol{X})$. Заметим также, что если $a(\boldsymbol{X})=\mathrm{const}$, $b(\boldsymbol{X})=\mathrm{const}$, то этот тип функции давления соответствует газу Чаплыгина. Групповая классификация для этого случая проведена в [18, 19], поэтому в настоящей работе рассматривается случай $p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ne 0$.

Так как $p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ne 0$, то в силу уравнения (24) имеем $\xi^t_{0\,\boldsymbol{X}}=0$, $\xi^{\boldsymbol{X}}=\xi^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X})$. Подставляя эти соотношения в уравнение (16), находим

$$\eta^1(t,X)=(\xi^t_{0\,t}(t)+\eta^{11}(\boldsymbol{X}))/2$$

($\eta^{11}(\boldsymbol{X})$ — произвольная функция интегрирования).

Дифференцируя уравнения (15), (21) по φ, получаем $\eta^{11}=k_3$ и $\xi^t_0(t)=k_4t^2+k_5t+k_6$ (k_3, k_4, k_5, k_6 — постоянные). Также получаем

$$\eta^0(t,\boldsymbol{X})=t^3k_8+t^2k_7+t\eta^{01}(\boldsymbol{X})+\eta^{00}(\boldsymbol{X}),$$

где k_7, k_8 — постоянные,

$$\eta^{00}_{\boldsymbol{X}}=\frac{1}{2p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}}\big(-k_3\varphi_{\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}+k_5(-\varphi_{\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}-4p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}})+{}$$
$$+2(\xi^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}+2\xi^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}-\xi^{\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}})\big),$$
$$\eta^{01}_{\boldsymbol{X}}=\frac{-k_4}{p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}}\big(\varphi_{\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}+4p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\big);$$
$$k_4\big(4p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}-5p^2_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}\big)=0. \qquad (25)$$

Вводя функцию

$$\mu_1=\frac{p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}}{p^2_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}},$$

уравнение (25) запишем в виде

$$k_4(4\mu_1-5)=0, \qquad (26)$$

а из уравнений (15), (21) получаем

$$2\xi^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{X}}\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}} - 2k_5\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}} + \xi^{\boldsymbol{X}}\big(- \mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}} + \mu_{1\,\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}\big) = 0. \tag{27}$$

Дальнейшее исследование проводится для двух случаев: $\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}} \neq 0$ и $\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}} = 0$.

3.3. *Случай* $\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}} \neq 0$. Так как $\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}} \neq 0$, то из уравнений (26), (27) следует $k_4 = 0$ и

$$\xi^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{2\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}}\big(2k_5\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}} + \xi^{\boldsymbol{X}}\big(\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}} - \mu_{1\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}\big)\big). \tag{28}$$

Исключая $\xi^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{X}}$ из уравнений (15), (21) и составляя их линейную комбинацию, получаем

$$\begin{aligned}
&2k_5\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\big(\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}} - \mu_{1\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}\big) + \\
&\qquad + \xi^{\boldsymbol{X}}\big(2\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}}\mu_{1\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}} + 2\mu^2_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}} - \mu^2_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}p^2_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}} - \\
&\qquad - 2\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}\mu_{1\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}} - 2\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}\mu_{1\boldsymbol{X}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}} + \mu^2_{1\boldsymbol{X}}p^2_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}\big) = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Дифференцируя уравнение (28) по $\varphi_{\boldsymbol{X}}$, имеем

$$\xi^{\boldsymbol{X}}\Delta = 0,$$

где

$$\Delta = \Big(\frac{\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}} - \mu_{1\boldsymbol{X}}P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}}{2\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}}\Big)_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}.$$

В случае $\Delta \neq 0$ $\xi^{\boldsymbol{X}} = 0$ и из уравнения (29) следует $k_5 = 0$. Это приводит к решению определяющих уравнений

$$\xi^t = k_6, \qquad \xi^{\boldsymbol{X}} = 0, \qquad \eta = t\eta^{01} + \eta^{00}, \qquad \eta^{00}_{\boldsymbol{X}} = 0, \qquad \eta^{01}_{\boldsymbol{X}} = 0.$$

Таким образом, в этом случае невозможно получить расширение ядра допустимых алгебр Ли.

В случае $\Delta = 0$ существует функция $\mu_2(\boldsymbol{X})$, такая что

$$\mu_{1\boldsymbol{X}} = \mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}}\big(P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}} - 2\mu_2P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\big)/P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}.$$

Уравнение (29) приведем к виду

$$k_5\mu_2 + \xi^{\boldsymbol{X}}(\mu_{2\boldsymbol{X}} + \mu_2^2) = 0. \tag{30}$$

Дифференцируя уравнение (30) по $\boldsymbol{X}$, получаем

$$k_5(2\mu_{2\boldsymbol{X}} + \mu_2^2) + \xi^{\boldsymbol{X}}(\mu_{2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}} + 3\mu_{2\boldsymbol{X}}\mu_2 + \mu_2^3) = 0. \tag{31}$$

Уравнения (30), (31) являются алгебраическими линейными однородными уравнениями относительно k_5 и $\xi^{\boldsymbol{X}}$ с определителем $\mu_2\mu_{2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}} - 2\mu^2_{2\boldsymbol{X}}$. В случае если этот определитель не равен нулю, $k_5 = 0$ и $\xi^{\boldsymbol{X}} = 0$. В этом случае расширение ядра допустимых алгебр Ли отсутствует. Тогда будем полагать, что

$$\mu_2\mu_{2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}} - 2\mu^2_{2\boldsymbol{X}} = 0. \tag{32}$$

Общим решением уравнения (32) являются функции $\mu_2(\boldsymbol{X}) = 0$, $\mu_2(\boldsymbol{X}) = 1/(k_1\boldsymbol{X} + k_2)$ (k_1, k_2 — постоянные, такие что $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$).

В случае $\mu_2(\boldsymbol{X}) \neq 0$, подставляя $\mu_2(\boldsymbol{X}) = 1/(k_1\boldsymbol{X} + k_2)$ в уравнения (28), (30), имеем

$$\xi^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{X}} = k_5 + \xi^{\boldsymbol{X}}/(k_1\boldsymbol{X} + k_2);$$

$$k_5(k_1\boldsymbol{X} + k_2) + \xi^{\boldsymbol{X}}(-k_1 + 1) = 0. \tag{33}$$

Если $k_1 \neq 0$, в силу преобразований эквивалентности, соответствующих операторам X_2^e, X_9^e (и инволюции E_1, если необходимо), можно предположить, что $k_2 = 0$, $k_1 = 1$. Из уравнения (33) получаем $k_5 = 0$. Следовательно,

$$\xi^{\boldsymbol{X}} = k_9 \boldsymbol{X}$$

(k_9 — постоянная).

Дальнейший анализ (ввиду громоздкости в данной работе этот анализ не проводится) показывает, что уравнения (15), (21) можно свести к уравнениям

$$P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}} = \frac{1}{2\boldsymbol{X}} \big(P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}} (-g\varphi_{\boldsymbol{X}} + 2\varphi_{\boldsymbol{X}} - 2f) + 4P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}} \big); \qquad (34)$$

$$P_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}} = \frac{1}{4\boldsymbol{X}} \big(\varphi_{\boldsymbol{X}}^2 P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}} g(g-4) + 4\varphi_{\boldsymbol{X}} P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}} (\varphi_{\boldsymbol{X}} + gf) - 8fP_{\varphi_{\boldsymbol{X}}} - \\ - 4P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}(2\varphi_{\boldsymbol{X}} - f) - 4\varphi_{\boldsymbol{X}} P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}(g-2) + \boldsymbol{X}(2gP_{\boldsymbol{X}} - 8l - 4fP_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}) \big) \qquad (35)$$

(g, l — постоянные; $f = f(\boldsymbol{X})$). Общее решение уравнений (34), (35) имеет вид

$$P(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}}) = \phi(Z) \boldsymbol{X}^{\alpha + 2\gamma} + h(\boldsymbol{X}),$$

где $\gamma \neq 0, 1$; $Z = \boldsymbol{X}^{-\alpha} \varphi_{\boldsymbol{X}}$; $\boldsymbol{X} h_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}} - (\alpha + 2\gamma - 1) h_{\boldsymbol{X}} = 0$. В этом случае ядро допустимых алгебр Ли расширяется оператором

$$Y_4 = (\gamma - 1) t \partial_t - \boldsymbol{X}\, \partial_{\boldsymbol{X}} - (\alpha + 1) \varphi\, \partial_\varphi.$$

Результаты для этого случая приведены в табл. 1 (модель M_1). В первой графе табл. 1 указан номер расширения, во второй — вид функции $P(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}})$, в третьей — расширения ядра допустимой алгебры Ли, в четвертой графе — ограничения для функций и констант.

Если $k_1 = 0$, уравнение (33) принимает вид

$$\xi^{\boldsymbol{X}} = -k_2 k_5.$$

Из условия $\xi^{\boldsymbol{X}} \neq 0$ следует $k_2 k_5 \neq 0$. Дальнейший анализ показывает, что уравнения (15), (21) можно свести к уравнениям

$$P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}} = \frac{1}{2k_2} \big(g_1 \varphi_{\boldsymbol{X}} P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}} + 2P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}} (\varphi_{\boldsymbol{X}} + 2f_1(\boldsymbol{X})) + 4P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}} \big); \qquad (36)$$

$$P_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}} = \frac{1}{4(k_2)^2} \big(P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}} (\varphi_{\boldsymbol{X}}^2 (g_1 + 2)^2 + 4\varphi_{\boldsymbol{X}} f_1(\boldsymbol{X})(g_1 + 2) + 4f_1^2(\boldsymbol{X})) + \\ + 4k_2 f_1'(\boldsymbol{X}) P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}} + 2(2g_1 \varphi_{\boldsymbol{X}} P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}} - 4P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}(\varphi_{\boldsymbol{X}} - f_1(\boldsymbol{X})) + 4l_1 k_2) \big), \qquad (37)$$

где g_1, l_1 — постоянные; $f_1(\boldsymbol{X})$ является функцией только $\boldsymbol{X}$. Общее решение уравнений (36), (37) имеет вид

$$P(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}}) = \phi(Z)\, \mathrm{e}^{(2\beta - \alpha)\boldsymbol{X}} + h(\boldsymbol{X}),$$

где $\beta \neq 0$; $\alpha \neq 0$; $Z = \mathrm{e}^{\alpha \boldsymbol{X}} \varphi_{\boldsymbol{X}}$; функция $h(\boldsymbol{X})$ удовлетворяет условию

$$h_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}} = h_{\boldsymbol{X}} (2\beta - \alpha).$$

Расширением ядра допустимых алгебр Ли является оператор

$$Y_5 = \beta t\, \partial_t - \partial_{\boldsymbol{X}} + \alpha \varphi\, \partial_\varphi.$$

Результат исследования для этого случая приведен в табл. 1 (модель M_2).

Таблица 1

Групповая классификация уравнения (13)

Номер модели	$P(\boldsymbol{X},\varphi_{\boldsymbol{X}})$	Расширения	Условия
M_1	$\Phi(z)X^{\alpha+2\gamma}+h(\boldsymbol{X})$, $z=X^{-\alpha}\varphi_{\boldsymbol{X}}$	$(\gamma-1)t\,\partial_t-\boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}}-(\alpha+1)\varphi\,\partial_\varphi$	$\gamma\neq 0,1,\ \alpha\neq -1$, $h''=(\alpha+2\gamma-1)h'/\boldsymbol{X}$
M_2	$\Phi(z)\,\mathrm{e}^{(2\beta-\alpha)\boldsymbol{X}}+h(\boldsymbol{X})$, $z=\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{X}}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}$	$\beta t\,\partial_t-\partial_{\boldsymbol{X}}+\alpha\varphi\,\partial_\varphi$	$\alpha\neq 0$, $h''=(2\beta-\alpha)h'$
M_3	$\Phi(z)X^{\alpha}+h(\boldsymbol{X})$, $z=X^{-\alpha}\varphi_{\boldsymbol{X}}$	$t\,\partial_t+\boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}}+(\alpha+1)\varphi\,\partial_\varphi$	$\alpha\neq -1$, $h''=(\alpha-1)h'/\boldsymbol{X}$
M_4	$\Phi(\varphi_{\boldsymbol{X}})+\beta\boldsymbol{X}+\gamma\boldsymbol{X}^2$	$\partial_{\boldsymbol{X}}-\gamma t^2\,\partial_\varphi$	$\gamma,\beta\neq 0$
M_5	$\Phi(\varphi_{\boldsymbol{X}})$	$t\partial_t+\boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}}+\varphi\,\partial_\varphi,\ \partial_{\boldsymbol{X}}$	—
M_6	$\mathrm{e}^{\beta\boldsymbol{X}}(\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}+(k_2/\alpha^2)\,\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)\boldsymbol{X}})$	$(\beta+\alpha(\gamma-1))t\,\partial_t-2\gamma\,\partial_{\boldsymbol{X}}+$ $+\,2(\beta-\alpha)\varphi\,\partial_\varphi$	$\alpha,\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0,1,\ \alpha-\beta\neq 0$
M_7	$\mathrm{e}^{\beta\boldsymbol{X}}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}$	$(\gamma-1)\partial_{\boldsymbol{X}}-\beta\varphi\,\partial_\varphi,\ (\gamma-1)\,t\partial_t-2\varphi\,\partial_\varphi$	$\beta\neq 0,\ \gamma\neq 0,1$
M_8	$b(\boldsymbol{X})\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}+k_1b^{m+1}(\boldsymbol{X})$	$(\gamma(1+m+2l)-m)t\,\partial_t+(2\gamma l)\boldsymbol{X}\partial_{\boldsymbol{X}}+$ $+\,2(\gamma l-m)\varphi\,\partial_\varphi$	$\gamma\neq 0,1,\ m\neq\gamma l,-1$, $l,\beta\neq 0,\ b^l=-1/(l\beta\boldsymbol{X})$
M_9	$b(\boldsymbol{X})\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}$	$l(\gamma-1)\boldsymbol{X}\partial_{\boldsymbol{X}}+(l(\gamma+1)+1)\varphi\,\partial_\varphi$, $(\gamma-1)t\partial_t-2\varphi\,\partial_\varphi$	$\gamma\neq 0,1,\ l,\beta\neq 0$, $b^l=-1/(l\beta\boldsymbol{X})$
M_{10}	$b(\boldsymbol{X})\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}+k_1\boldsymbol{X}^2$	$(2l-1)t\,\partial_t+2l\gamma\boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}}+$ $+\,2(2l-1+l\gamma)\varphi\,\partial_\varphi$	$\gamma\neq 0,1,\ l,\beta,k_1\neq 0$, $b^l=l\beta\boldsymbol{X}$
M_{11}	$\mathrm{e}^{\beta\boldsymbol{X}}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}+k_1\boldsymbol{X}^2$	$-\beta t\,\partial_t+2\gamma\,\partial_{\boldsymbol{X}}-2\beta\varphi\,\partial_\varphi$	$\gamma\neq 0,1,\ \beta,k_1\neq 0$
M_{12}	$k_1\boldsymbol{X}\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}+k_2\boldsymbol{X}^{\alpha+1}$	$(\gamma(1-\alpha)+\alpha)t\,\partial_t+2\gamma\boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}}+$ $+\,2(\gamma+\alpha)\varphi\,\partial_\varphi$	$\gamma\neq 0,1,\ k_1,k_2\neq 0$, $\alpha\neq -1,0,\ \gamma+\alpha\neq 0$
M_{13}	$\beta\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}+k_1\boldsymbol{X}^2$	$\partial_{\boldsymbol{X}}-k_1t^2\,\partial_\varphi,\ t\,\partial_t+\gamma\boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}}+(\gamma+2)\varphi\,\partial_\varphi$	$\gamma\neq 0,1,-2$, $k_1,\beta\neq 0$
M_{14}	$\beta\varphi_{\boldsymbol{X}}^{-3}+k_1\boldsymbol{X}^2$	$\partial_{\boldsymbol{X}}-k_1t^2\,\partial_\varphi,\ t\,\partial_t-3\boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}}-\varphi\,\partial_\varphi$	$\beta,k_1\neq 0$
M_{15}	$\beta\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}$	$(\gamma-1)t\,\partial_t-2\varphi\,\partial_\varphi$, $(\gamma-1)\boldsymbol{X}\partial_{\boldsymbol{X}}+(\gamma+1)\varphi\,\partial_\varphi,\ \partial_{\boldsymbol{X}}$	$\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0,1$
M_{16}	$\beta\varphi_{\boldsymbol{X}}^{-3}$	$\partial_{\boldsymbol{X}},\ 2\boldsymbol{X}\partial_{\boldsymbol{X}}+\varphi\,\partial_\varphi$, $t^2\,\partial_t+t\varphi\,\partial_\varphi,\ 2t\,\partial_t+\varphi\,\partial_\varphi$	$\beta\neq 0$
M_{17}	$b(\boldsymbol{X})\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}$	$(\gamma-1)t\,\partial_t-2\varphi\,\partial_\varphi$	$\gamma\neq 0,1$
M_{18}	$b(\boldsymbol{X})\varphi_{\boldsymbol{X}}^{-3}$	$t^2\,\partial_t+t\varphi\,\partial_\varphi,\ 2t\,\partial_t+\varphi\,\partial_\varphi$	—

В случае $\mu_2(\boldsymbol{X})=0$, подставляя $\mu_2(\boldsymbol{X})=0$ в уравнение (28), получаем $\xi^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{X}}=k_5$. Следовательно,

$$\xi^{\boldsymbol{X}}=k_5\boldsymbol{X}+k_9.$$

Так как $\xi^{\boldsymbol{X}}\neq 0$, то $k_5^2+k_9^2\neq 0$. Анализируя уравнения (15), (21), получаем

$$P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}}=P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}(P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}}P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\mu_1-g_2)/P^2_{\varphi_{\boldsymbol{X}}} \tag{38}$$

($g_2=g_2(\boldsymbol{X},\varphi_{\boldsymbol{X}})$). Дифференцируя уравнение (38) по $\varphi_{\boldsymbol{X}}$ и сравнивая смешанные производные, находим

$$g_{2\varphi_{\boldsymbol{X}}}P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}}-2P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}g_2=0. \tag{39}$$

Решая уравнение (39), получаем два решения:

$$g_2(\boldsymbol{X},\varphi_{\boldsymbol{X}})=h(\boldsymbol{X})P^2_{\varphi_{\boldsymbol{X}}},\qquad g_2(\boldsymbol{X},\varphi_{\boldsymbol{X}})=0$$

и условие

$$k_5(\boldsymbol{X}h_{\boldsymbol{X}} + h) + k_9 h_{\boldsymbol{X}} = 0. \tag{40}$$

Дифференцируя уравнение (40) по $\boldsymbol{X}$, имеем

$$k_5\big(\boldsymbol{X}h_{\boldsymbol{XX}} + 2h_{\boldsymbol{X}}\big) + k_9 h_{\boldsymbol{XX}} = 0. \tag{41}$$

Уравнения (40), (41) являются алгебраическими линейными однородными уравнениями относительно k_5, k_9 с определителем $hh_{\boldsymbol{XX}} - 2h^2_{\boldsymbol{X}}$. В случае если определитель не равен нулю, $k_5 = 0$, $k_9 = 0$ и расширение ядра допустимых алгебр отсутствует. Следовательно, необходимо предположить, что

$$hh_{\boldsymbol{XX}} - 2h^2_{\boldsymbol{X}} = 0. \tag{42}$$

Общим решением уравнения (42) являются функции $h(\boldsymbol{X}) = 0$, $h(\boldsymbol{X}) = 1/(k_1\boldsymbol{X} + k_2)$ (k_1, k_2 — постоянные, такие что $k_1^2 + k_2^2 \ne 0$).

В случае $h(\boldsymbol{X}) \ne 0$, подставляя $h(\boldsymbol{X}) = 1/(k_1\boldsymbol{X} + k_2)$ в уравнение (40), получаем

$$k_5k_2 - k_9k_1 = 0. \tag{43}$$

Рассмотрим два случая: $k_1 \ne 0$, $k_1 = 0$.

Если $k_1 \ne 0$, будем полагать, что $k_1 = 1$, $k_2 = 0$. Из уравнения (43) следует

$$k_9 = 0, \qquad \xi^{\boldsymbol{X}} = k_5\boldsymbol{X}.$$

Продолжая анализ, получаем

$$P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}} = -P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}(\varphi_{\boldsymbol{X}} + f_2(\boldsymbol{X}))/\boldsymbol{X}; \tag{44}$$

$$P_{\boldsymbol{XX}} = \big(\boldsymbol{X}(-f_{2\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X})P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}} - 2l_3) + P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}(\varphi^2_{\boldsymbol{X}} + 2f_2(\boldsymbol{X})\varphi_{\boldsymbol{X}} + f_2^2(\boldsymbol{X}))\big)/\boldsymbol{X}^2 \tag{45}$$

($f_2 = f_2(\boldsymbol{X})$; l_3 — постоянная). Общим решением уравнений (44), (45) является функция

$$P(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}}) = \phi(Z)\boldsymbol{X}^{\alpha} + h(\boldsymbol{X}),$$

где $\alpha \ne -1$; $Z = \boldsymbol{X}^{-\alpha}\varphi_{\boldsymbol{X}}$; функция $h(\boldsymbol{X})$ удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{X}h_{\boldsymbol{XX}} = h_{\boldsymbol{X}}(\alpha - 1).$$

В этом случае расширение ядра допустимых алгебр Ли определяется оператором

$$Y_6 = t\,\partial_t + \boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}} + (\alpha + 1)\varphi\,\partial_{\varphi}.$$

Результат для этого случая приведен в табл. 1 (модель M_3).

Если $k_1 = 0$, то можно предположить, что $k_2 = 1$. Из уравнения (43) получаем

$$k_5 = 0, \qquad \xi^{\boldsymbol{X}} = k_9$$

($k_9 \ne 0$). Продолжая вычисления, находим

$$P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}} = -P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}(\varphi_{\boldsymbol{X}} + f_3(\boldsymbol{X})); \tag{46}$$

$$P_{\boldsymbol{XX}} = -f_{3\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X})P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}} + \varphi^2_{\boldsymbol{X}}P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}} + P_{\boldsymbol{X}} - 2l_4 + f_3(\boldsymbol{X})P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}}(2\varphi_{\boldsymbol{X}} + f_3(\boldsymbol{X})) \tag{47}$$

($f_3 = f_3(\boldsymbol{X})$; l_4 — постоянная). Общим решением уравнений (46), (47) является функция

$$P(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}}) = \phi(Z)\,\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{X}} + h(\boldsymbol{X}),$$

где $Z = \mathrm{e}^{-\alpha\boldsymbol{X}}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}$; функция $h(\boldsymbol{X})$ удовлетворяет условию

$$h_{\boldsymbol{XX}} = \alpha h_{\boldsymbol{X}}.$$

Расширение ядра допустимых алгебр Ли определяется оператором

$$Y = \partial_{\boldsymbol{X}} + \alpha\varphi\,\partial_\varphi.$$

Данная модель является частным случаем модели M_2 (см. табл. 1).

В случае $h(\boldsymbol{X}) = 0$, подставляя $h(\boldsymbol{X}) = 0$, получаем $g_2 = 0$. Из (15), (21) следует

$$P_{\boldsymbol{X}} = -f_4 P_{\varphi_{\boldsymbol{X}}} + g_{11}(\boldsymbol{X});$$

$$k_5(g_{11\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X} + 2g_{11\boldsymbol{X}}) + g_{11\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}}k_9 = 0 \tag{48}$$

($f_4 = f_4(\boldsymbol{X})$). Дифференцируя уравнение (48) по $\boldsymbol{X}$, получаем

$$k_5(g_{11\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X} + 3g_{11\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}}) + g_{11\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}}k_9 = 0. \tag{49}$$

Уравнения (48), (49) представляют собой алгебраические линейные однородные уравнения относительно k_5, k_9 с определителем $2g_{11\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}}g_{11\boldsymbol{X}} - 3g^2_{11\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}}$. Для существования расширения ядра допустимых алгебр Ли необходимо, чтобы выполнялось условие

$$2g_{11\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}}g_{11\boldsymbol{X}} - 3g^2_{11\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}} = 0. \tag{50}$$

Общим решением уравнения (50) являются функции $g_{11\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}) = 0$, $g_{11\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}) = 4/(k_1\boldsymbol{X} + k_2)^2$ (k_1, k_2 — постоянные, такие что $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$).

Если $g_{11\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}) \neq 0$, то подставляя $g_{11\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}) = 4/(k_1\boldsymbol{X} + k_2)^2$ в (48), находим

$$4k_5k_2 - 4k_9k_1 = 0. \tag{51}$$

Рассмотрим два случая: $k_1 \neq 0$, $k_1 = 0$.

При $k_1 \neq 0$ будем полагать, что $k_1 = 1$, $k_2 = 0$. Из уравнения (51) следует $k_9 = 0$. Расширение ядра допустимых алгебр Ли определяется оператором

$$Y = t\,\partial_t + \boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}} + \varphi\,\partial_\varphi,$$

и функция для давления имеет вид

$$P(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}}) = \phi(\varphi_{\boldsymbol{X}}) + h(\boldsymbol{X}),$$

где $h = -4\alpha^2 \ln \boldsymbol{X}$ ($\alpha \neq 0$). Эта модель принадлежит классу M_3 (см. табл. 1).

При $k_1 = 0$, подставляя $k_1 = 0$ в уравнение (51) и полагая $k_2 = 1$, получаем

$$k_5 = 0.$$

В этом случае расширение ядра допустимых операторов алгебр Ли определяется оператором

$$Y_7 = \partial_{\boldsymbol{X}} - \gamma t^2\,\partial_\varphi$$

и соответствующая функция для давления принимает вид

$$P(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}}) = \phi(\varphi_{\boldsymbol{X}}) + \beta\boldsymbol{X} + \gamma\boldsymbol{X}^2$$

($\gamma \neq 0$) (модель M_4 в табл. 1).

Если $g_{11\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X}) = 0$, то $g_{11}(\boldsymbol{X}) = l_5$, где l_5 — некоторая постоянная. Решение определяющих уравнений имеет вид

$$Y_8 = t\,\partial_t + \boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}} + \varphi\,\partial_\varphi, \qquad Y_9 = \partial_{\boldsymbol{X}},$$

соответствующая функция для давления записывается следующим образом:

$$P(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}}) = \phi(\varphi_{\boldsymbol{X}})$$

(модель M_5 в табл. 1).

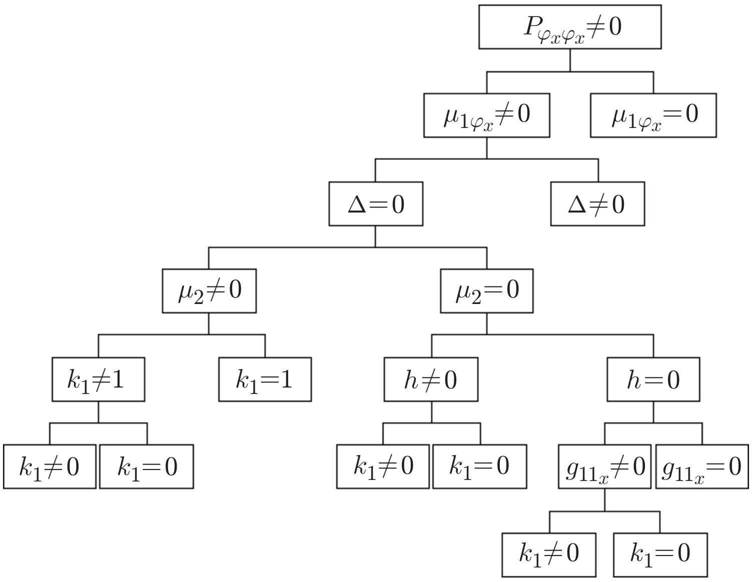

Рис. 1. Разветвления в случае $\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{x}}} \neq 0$

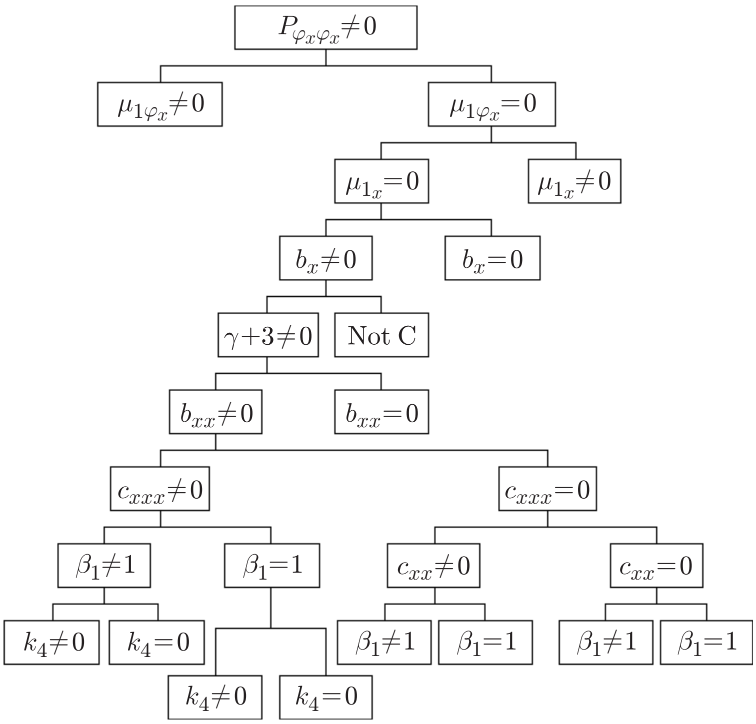

Рис. 2. Разветвления в случае $\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{x}}} = 0$

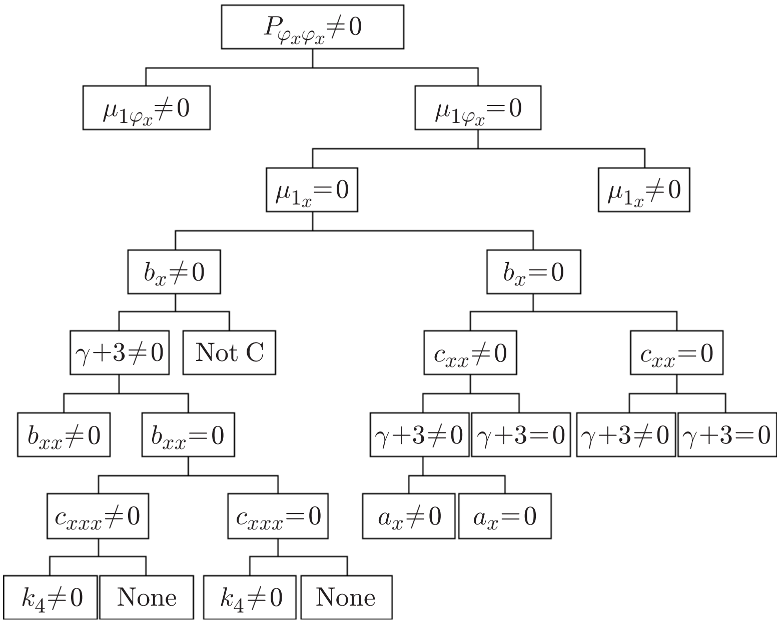

Рис. 3. Разветвления в случае $\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}} = 0$, $\mu_{1\boldsymbol{X}} = 0$

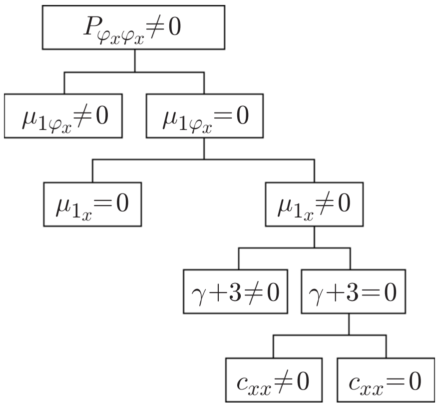

Рис. 4. Разветвления в случае $\mu_{1\varphi_{\boldsymbol{X}}} = 0$, $\mu_{1\boldsymbol{X}} \neq 0$

Замечание. Аналогичным образом исследуются остальные случаи. Поскольку анализ этих случаев является громоздким и требует исследования множества частных случаев, данный анализ не проводится. Все возможные варианты решений приведены на рис. 1–4.

4. Законы сохранения. Рассмотрим приложения теоремы Нетер к моделям, представленным в табл. 1.

При выводе уравнения (13) использовался лагранжиан

$$L^L(\boldsymbol{X}, \varphi_t, \varphi_{\boldsymbol{X}}) = \varphi_t^2/2 - \varphi_{\boldsymbol{X}}^{-1} W(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}}).$$

Функция $p(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}})$ и потенциал $W(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}})$ связаны формулой

$$p = \rho W_\rho - W \tag{52}$$

($\rho = {\varphi_{\boldsymbol{X}}}^{-1}$). Решая уравнение (52) для потенциала W, находим функции $W(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}})$, которые приведены в табл. 2.

Таблица 2

Представления функции $W(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}})$

Номер модели	$W(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}})$	Условия	Номер модели	$W(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}})$	Условия
M_1	$-\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\,\Phi(z)\boldsymbol{X}^{2(\alpha+\gamma)} - h(\boldsymbol{X})$	$\gamma \ne 0, 1$	M_2	$-\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\,\mathrm{e}^{2(\beta-\alpha)\boldsymbol{X}}\,\Phi(z) - h(\boldsymbol{X})$	$\alpha \ne 0$
M_3	$-\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\,\Phi(z)\boldsymbol{X}^{2\alpha} - h(\boldsymbol{X})$	$\alpha \ne -1$	M_4	$-\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\,\Phi(z) - (\beta\boldsymbol{X} + \gamma\boldsymbol{X}^2)$	$\alpha, \beta \ne 0$
M_5	$-\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\,\Phi(z)$	—	M_6	$\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ln\Big(\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\Big)\,\mathrm{e}^{\beta\boldsymbol{X}} - \dfrac{k_2}{\alpha^2}\,\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{X}}$	$\gamma = -1$
				$-\dfrac{\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}}{\gamma+1}\,\mathrm{e}^{\beta\boldsymbol{X}} - \dfrac{k_2}{\alpha^2}\,\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{X}}$	$\gamma \ne -1$
M_7	$\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ln\Big(\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\Big)\,\mathrm{e}^{\beta\boldsymbol{X}}$	$\gamma = -1$	M_8	$\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ln\Big(\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\Big)b(\boldsymbol{X}) - c(\boldsymbol{X})$	$\gamma = -1$
	$-\dfrac{\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}}{\gamma+1}\,\mathrm{e}^{\beta\boldsymbol{X}}$	$\gamma \ne -1$		$-\dfrac{\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}}{\gamma+1}\,b(\boldsymbol{X}) - c(\boldsymbol{X})$	$\gamma \ne -1$
M_9	$\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ln\Big(\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\Big)b(\boldsymbol{X})$	$\gamma = -1$	M_{10}	$\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ln\Big(\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\Big)b(\boldsymbol{X}) - k_1\boldsymbol{X}^2$	$\gamma = -1$
	$-\dfrac{\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}}{\gamma+1}\,b(\boldsymbol{X})$	$\gamma \ne -1$		$-\dfrac{\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}}{\gamma+1}\,b(\boldsymbol{X}) - k_1\boldsymbol{X}^2$	$\gamma \ne -1$
M_{11}	$\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ln\Big(\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\Big)\,\mathrm{e}^{\beta\boldsymbol{X}} - k_1\boldsymbol{X}^2$	$\gamma = -1$	M_{12}	$\dfrac{k_1\boldsymbol{X}}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ln\Big(\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\Big) - k_2\boldsymbol{X}^{\alpha+1}$	$\gamma = -1$
	$-\dfrac{\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}}{\gamma+1}\,\mathrm{e}^{\beta X} - k_1\boldsymbol{X}^2$	$\gamma \ne -1$		$-\dfrac{k_1\boldsymbol{X}}{\gamma+1}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma} - k_2\boldsymbol{X}^{\alpha+1}$	$\gamma \ne -1$
M_{13}	$\dfrac{\beta}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ln\Big(\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\Big) - k_1\boldsymbol{X}^2$	$\gamma = -1$	M_{14}	$\dfrac{\beta}{2}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}^{-3} - k_1\boldsymbol{X}^2$	—
	$-\dfrac{\beta}{\gamma+1}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma} - k_1\boldsymbol{X}^2$	$\gamma \ne -1$			
M_{15}	$\dfrac{\beta}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ln\Big(\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\Big)$	$\gamma = -1$	M_{16}	$\dfrac{\beta}{2}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}^{-3}$	—
	$-\dfrac{\beta}{\gamma+1}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}$	$\gamma \ne -1$			
M_{17}	$\dfrac{b(\boldsymbol{X})}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\ln\Big(\dfrac{1}{\varphi_{\boldsymbol{X}}}\Big)$	$\gamma = -1$	M_{18}	$\dfrac{b(\boldsymbol{X})}{2}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}^{-3}$	—
	$-\dfrac{b(\boldsymbol{X})}{\gamma+1}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma}$	$\gamma \ne -1$			

С использованием групп преобразований, представленных в табл. 1, и теоремы Нетер выводим законы сохранения

$$D_t C^t + D_{\boldsymbol{X}} C^{\boldsymbol{X}} = 0$$

(коэффициенты C^t, $C^{\boldsymbol{X}}$ приведены в табл. 3).

Оператор $Y = t\,\partial_t + \boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}} + \varphi\,\partial_\varphi$ в модели M_5, оператор $Y = (\gamma - 1)\,\partial_{\boldsymbol{X}} - \beta\varphi\,\partial_\varphi$ в модели M_7, оператор $Y = t\,\partial_t - 3\boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}} - \varphi\,\partial_\varphi$ в модели M_{14}, оператор $Y = 2\boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}} + \varphi\,\partial_\varphi$ в модели M_{16} и оператор $Y = -\beta t\,\partial_t + 2\gamma\,\partial_{\boldsymbol{X}} - 2\beta\varphi\,\partial_\varphi$ в модели M_{11} не являются дивергентными и не позволяют получить законы сохранения. В табл. 3 для моделей, в которых имеется более одного дополнительного допустимого оператора, указаны также операторы, по которым получены соответствующие законы сохранения.

Таблица 3

Представления законов сохранения в лагранжевых координатах

Номер модели	C^t, $C^{\boldsymbol{X}}$	Условия
M_1	$C^t = -t\boldsymbol{X}\varphi_{\boldsymbol{X}} h'(\boldsymbol{X}) + (\alpha+1)(\varphi\varphi_t - t\varphi_{\boldsymbol{X}} h(\boldsymbol{X})) - (\alpha+3/2)t\varphi_t^2 - \boldsymbol{X}\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}} + (2\alpha+3)t\boldsymbol{X}^{-2\alpha-4}\Phi(z)$, $C^{\boldsymbol{X}} = t\boldsymbol{X}\varphi_t h'(\boldsymbol{X}) + (\alpha+1)(\varphi+t\varphi_t)h(\boldsymbol{X}) + \boldsymbol{X}\varphi_t^2/2 + \boldsymbol{X}^{-2\alpha-3}\Phi(z) +$ $+ ((\alpha+1)\varphi - (2\alpha+3)t\varphi_t - \boldsymbol{X}\varphi_{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{X}^{-3\alpha-4}\Phi'(z)$	$\gamma = -2\alpha - 2$
M_2	$C^t = -t\varphi_{\boldsymbol{X}} h'(\boldsymbol{X}) - 2\alpha t\,\mathrm{e}^{2\alpha\boldsymbol{X}}\,\Phi(z) - \alpha\varphi\varphi_t + \alpha t\varphi_{\boldsymbol{X}} h(\boldsymbol{X}) + \alpha t\varphi_t^2 - \varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}}$, $C^{\boldsymbol{X}} = t\varphi_t h'(\boldsymbol{X}) - \alpha\varphi h(\boldsymbol{X}) - \alpha t\varphi_t h(\boldsymbol{X}) + \varphi_t^2/2 + \mathrm{e}^{2\alpha\boldsymbol{X}}\,\Phi(z) + (-\alpha\varphi + 2\alpha t\varphi_t - \varphi_{\boldsymbol{X}})\,\mathrm{e}^{3\alpha\boldsymbol{X}}\,\Phi'(z)$	$\beta = 2\alpha$
M_3	$C^t = t\boldsymbol{X}\varphi_{\boldsymbol{X}} h'(\boldsymbol{X}) + t\varphi_t^2/2 + \boldsymbol{X}\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}} - t\Phi(z)/\boldsymbol{X}^2$, $C^{\boldsymbol{X}} = -t\boldsymbol{X}\varphi_t h'(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{X}\varphi_t^2/2 - \Phi(z)/\boldsymbol{X} + (t\varphi_t/\boldsymbol{X} + \varphi_{\boldsymbol{X}})\Phi'(z)$	$\alpha = -1$
M_4	$C^t = \varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}} + \gamma t^2\varphi_t + 2\gamma t\boldsymbol{X}\varphi_{\boldsymbol{X}}$, $C^{\boldsymbol{X}} = \beta\varphi + \beta\gamma t^2\boldsymbol{X} - \varphi_t^2/2 - 2\gamma t\boldsymbol{X}\varphi_t + \gamma^2 t^2\boldsymbol{X}^2 - \Phi(z) + (\varphi_{\boldsymbol{X}} + \gamma t^2)\Phi'(z)$	—
M_5	$\boldsymbol{X}_2 = \partial_{\boldsymbol{X}}$ $C^t = \varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}}, \quad C^{\boldsymbol{X}} = -\varphi_t^2/2 - \Phi(z) + \varphi_{\boldsymbol{X}}\Phi'(z)$	—
M_6	$C^t = 2(3\alpha)^{-1}((2\alpha^2 t\ln\varphi_{\boldsymbol{X}}\,\mathrm{e}^{2\alpha\boldsymbol{X}/3} + 2k_2 t\varphi_{\boldsymbol{X}}\,\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{X}} + \alpha^2\varphi\varphi_t - \alpha^2 t\varphi_t^2 + 3\alpha\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}})$, $C^{\boldsymbol{X}} = (3\alpha)^{-1}(\alpha\,\mathrm{e}^{2\alpha\boldsymbol{X}/3}(-6\varphi_{\boldsymbol{X}}\ln\varphi_{\boldsymbol{X}} + 2\alpha\varphi - 4\alpha t\varphi_t + 3\varphi_{\boldsymbol{X}}) + 2k_2\,\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{X}}(\varphi\varphi_{\boldsymbol{X}} - 2t\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}}) - 3\alpha\varphi_t^2\varphi_{\boldsymbol{X}})/\varphi_{\boldsymbol{X}}$	$\gamma = -1$, $\beta = 2\alpha/3$
	$C^t = -4\alpha t\,\mathrm{e}^{2\alpha\boldsymbol{X}}, \quad C^{\boldsymbol{X}} = 2\,\mathrm{e}^{2\alpha\boldsymbol{X}}$	$\gamma = -1$, $\beta = 2\alpha$
	$C^t = 2\gamma(3\alpha)^{-1}(-(2\alpha^2/(\gamma+1))t\,\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{X}(\gamma+3)/3}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma+1} - 2k_2 t\varphi_{\boldsymbol{X}}\,\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{X}} - \alpha^2\varphi\varphi_t + \alpha^2 t\varphi_t^2 - 3\alpha\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}})$, $C^{\boldsymbol{X}} = \gamma(3\alpha)^{-1}(-6\alpha\gamma(\gamma+1)^{-1}\,\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{X}(\gamma+3)/3}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma+1} + (2\alpha^2\,\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{X}(\gamma+3)/3}\,\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma} + 2k_2\,\mathrm{e}^{\alpha\boldsymbol{X}})(2t\varphi_t - \varphi) + 3\alpha\varphi_t^2)$	$\gamma \neq -1$, $\beta = \alpha(\gamma+3)/3$
M_7	$\boldsymbol{X}_2 = (\gamma-1)t\,\partial_t - 2\varphi\,\partial_\varphi$ $C^t = 2(-t\,\mathrm{e}^{\beta\boldsymbol{X}} + \varphi\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}}^2 - t\varphi_t^2\varphi_{\boldsymbol{X}}^2)/\varphi_{\boldsymbol{X}}^2, \quad C^{\boldsymbol{X}} = 2\,\mathrm{e}^{\beta\boldsymbol{X}}(\varphi - 2t\varphi_t)/\varphi_{\boldsymbol{X}}^3$	$\gamma = -3$
M_8	$C^t = 2(1-l)(k_1 l^2\beta^2 t\boldsymbol{X}^2\varphi_{\boldsymbol{X}} b^{3/2}(\boldsymbol{X}) + t\ln\varphi_{\boldsymbol{X}} b(\boldsymbol{X}) - t\varphi_t^2/2) + (4l-1)tb(\boldsymbol{X}) + (1-2l)\varphi\varphi_t - 2l\boldsymbol{X}\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}}$, $C^{\boldsymbol{X}} = k_1 l^2\beta^2\boldsymbol{X}^2 b^{3/2}(\boldsymbol{X})((1-2l)\varphi - 2(1-l)t\varphi_t) + (1-2l)\varphi b(\boldsymbol{X})/\varphi_{\boldsymbol{X}} -$ $-2(1-l)t\varphi_t b(\boldsymbol{X})/\varphi_{\boldsymbol{X}} + 2l\boldsymbol{X}b(\boldsymbol{X})(\ln\varphi_{\boldsymbol{X}} - 1) + l\boldsymbol{X}\varphi_t^2$	$\gamma = -1$, $m = -(4l-1)/2$

Продолжение табл. 3

Номер модели	C^t, $C^{\boldsymbol{X}}$	Условия
M_9	$\boldsymbol{X}_1 = l(\gamma-1)\boldsymbol{X}\partial_{\boldsymbol{X}} + (l(\gamma+1)+1)\varphi\,\partial_\varphi$ $C^t = -\varphi\varphi_t - 2\boldsymbol{X}\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}} - 3t/(\beta\boldsymbol{X}), \quad C^{\boldsymbol{X}} = -2\beta^{-1}\ln\varphi_{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{X}\varphi_t^2 + \beta^{-1}(\varphi/(\boldsymbol{X}\varphi_{\boldsymbol{X}})+2)$	$\gamma = -1$, $l = 1$
	$C^t = (1-\gamma)(3\gamma+1)^{-1}(\varphi\varphi_t + 2\boldsymbol{X}\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}})$, $C^{\boldsymbol{X}} = (3\gamma+1)^{-3(\gamma+1)/2}(\gamma+1)^{-1}(2\beta\boldsymbol{X})^{(3\gamma+1)/2}((1-\gamma^2)\varphi\varphi_{\boldsymbol{X}}^\gamma + 2\gamma(1-\gamma)\boldsymbol{X}\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma+1}) + (\gamma-1)(3\gamma+1)^{-1}\boldsymbol{X}\varphi_t^2$	$\gamma \ne -1$, $l = -2/(3\gamma+1)$
	$\boldsymbol{X}_2 = (\gamma-1)t\,\partial_t - 2\varphi\,\partial_\varphi$ $C^t = 2(-tb(\boldsymbol{X}) + \varphi\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}}^2 - t\varphi_t^2\varphi_{\boldsymbol{X}}^2)/\varphi_{\boldsymbol{X}}^2, \quad C^{\boldsymbol{X}} = 2b(\boldsymbol{X})(\varphi - 2t\varphi_t)/\varphi_{\boldsymbol{X}}^3$	$\gamma = -3$
M_{10}	$C^t = \dfrac{\gamma}{4(\gamma+1)^4}\Big(\Big(\dfrac{\beta}{2(\gamma+1)}\Big)^{2\gamma}\beta^2 t\boldsymbol{X}^{2\gamma+2}\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma+1} + (\gamma^2(\gamma+3)+3\gamma+1)(4\varphi\varphi_t - 2t\varphi_t^2 + 4\boldsymbol{X}\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}} + 4k_1t\boldsymbol{X}^2\varphi_{\boldsymbol{X}})\Big)$, $C^{\boldsymbol{X}} = \dfrac{\gamma\boldsymbol{X}}{4(\gamma+1)^4}\Big(\Big(\dfrac{\beta}{2(\gamma+1)}\Big)^{2\gamma}(\gamma+1)\beta^2\boldsymbol{X}^{2\gamma+1}\varphi_{\boldsymbol{X}}^\gamma(\varphi - t\varphi_t) + \Big(\dfrac{\beta}{2(\gamma+1)}\Big)^{2\gamma}\gamma\beta^2\boldsymbol{X}^{2\gamma+2}\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma+1} +$ $+ (\gamma^2(\gamma+3)+3\gamma+1)(4k_1\boldsymbol{X}\varphi - 4k_1t\boldsymbol{X}\varphi_t - 2\varphi_t^2)\Big)$	$\gamma \ne -1$, $l = \dfrac{1}{2(\gamma+1)}$
M_{12}	$C^t = -4k_2t\boldsymbol{X}^{7/2}\varphi_{\boldsymbol{X}} - 4k_1t\boldsymbol{X}\ln\varphi_{\boldsymbol{X}} - 3\varphi\varphi_t + 2t\varphi_t^2 - 2\boldsymbol{X}\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}} + 5k_1t\boldsymbol{X}$, $C^{\boldsymbol{X}} = -3k_2\boldsymbol{X}^{7/2}\varphi + 4k_2t\boldsymbol{X}^{7/2}\varphi_t + 2k_1\boldsymbol{X}^2\ln\varphi_{\boldsymbol{X}} - 3k_1\boldsymbol{X}\varphi/\varphi_{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{X}\varphi_t^2 + 4k_1t\boldsymbol{X}\varphi_t/\varphi_{\boldsymbol{X}} - 2k_1\boldsymbol{X}^2$	$\gamma = -1$, $\alpha = 5/2$
	$C^t = -\dfrac{2k_2\gamma(3\gamma-1)}{(\gamma+1)(\gamma+3)}\,t\boldsymbol{X}\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma+1} - \dfrac{2k_2\gamma(3\gamma-1)}{\gamma+3}\,t\boldsymbol{X}^{(3-4\gamma)/(\gamma+3)}\varphi_{\boldsymbol{X}} - \dfrac{2\gamma(\gamma-2)}{\gamma+3}\,\varphi\varphi_t + \dfrac{\gamma(3\gamma-1)}{\gamma+3}\,t\varphi_t^2 + 2\gamma\boldsymbol{X}\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}}$, $C^{\boldsymbol{X}} = -\dfrac{2k_1\gamma(\gamma-2)}{\gamma+3}\boldsymbol{X}\varphi\varphi_{\boldsymbol{X}}^\gamma + \dfrac{2k_1\gamma(3\gamma-1)}{\gamma+3}\,t\boldsymbol{X}\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}}^\gamma + \dfrac{2k_1\gamma^2}{\gamma+1}\,\boldsymbol{X}^2\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma+1} -$ $-\dfrac{2k_2\gamma(\gamma-2)}{\gamma+3}\,\boldsymbol{X}^{(3-4\gamma)/(\gamma+3)}\varphi + \dfrac{2k_2\gamma(3\gamma-1)}{\gamma+3}\,t\boldsymbol{X}^{(3-4\gamma)/(\gamma+3)}\varphi_t$	$\gamma \ne -1$, $\alpha = -\dfrac{5\gamma}{\gamma+3}$
M_{13}	$\boldsymbol{X}_1 = t\,\partial_t + \gamma\boldsymbol{X}\,\partial_{\boldsymbol{X}} + (\gamma+2)\varphi\,\partial_\varphi$ $C^t = -\beta t\ln\varphi_{\boldsymbol{X}} + 2\beta t - \varphi\varphi_t + t\varphi_t^2/2 - \boldsymbol{X}\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}} - k_1t\boldsymbol{X}^2\varphi_{\boldsymbol{X}}$, $C^{\boldsymbol{X}} = \beta\boldsymbol{X}\ln\varphi_{\boldsymbol{X}} - \beta(\varphi/\varphi_{\boldsymbol{X}} - t\varphi_t/\varphi_{\boldsymbol{X}}) - \beta\boldsymbol{X} - k_1\boldsymbol{X}^2\varphi + \boldsymbol{X}\varphi_t^2/2 + k_1tX^2\varphi_t$	$\gamma = -1$
	$\boldsymbol{X}_2 = \partial_{\boldsymbol{X}} - k_1t^2\,\partial_\varphi$ $C^t = \varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}} + k_1t^2\varphi_t + 2k_1tX\varphi_{\boldsymbol{X}}$, $C^{\boldsymbol{X}} = -\beta\ln\varphi_{\boldsymbol{X}} + \beta + k_1\beta t^2/\varphi_{\boldsymbol{X}} - \varphi_t^2/2 - 2k_1t\boldsymbol{X}\varphi_t + k_1^2t^2\boldsymbol{X}^2$	$\gamma = -1$
	$C^t = \varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}} + k_1t^2\varphi_t + 2k_1t\boldsymbol{X}\varphi_{\boldsymbol{X}}$, $C^{\boldsymbol{X}} = (\beta\gamma/(\gamma+1))\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma+1} + \beta k_1t^2\varphi_{\boldsymbol{X}}^\gamma - \varphi_t^2/2 - 2k_1t\boldsymbol{X}\varphi_t + k_1^2t^2\boldsymbol{X}^2$	$\gamma \ne -1$

Окончание табл. 3

Номер модели	C^t, $C^{\boldsymbol{X}}$	Условия
M_{14}	$\boldsymbol{X}_1 = \partial_{\boldsymbol{X}} - k_1 t^2\, \partial_\varphi$ $C^t = \varphi_t \varphi_{\boldsymbol{X}} + k_1 t^2 \varphi_t + 2k_1 t \boldsymbol{X} \varphi_{\boldsymbol{X}}$, $C^{\boldsymbol{X}} = 3\beta/(2\varphi_{\boldsymbol{X}}^2) + \beta k_1 t^2/\varphi_{\boldsymbol{X}}^3 - \varphi_t^2/2 - 2k_1 t \boldsymbol{X} \varphi_t + k_1^2 t^2 \boldsymbol{X}^2$	—
M_{15}	$\boldsymbol{X}_1 = (\gamma-1)t\, \partial_t - 2\varphi\, \partial_\varphi$ $C^t = 2\beta t \ln \varphi_{\boldsymbol{X}} - 2\beta t + 2\varphi\varphi_t - t\varphi_t^2 + 2\boldsymbol{X}\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}}$, $C^{\boldsymbol{X}} = -2\beta X \ln\varphi_{\boldsymbol{X}} + 2\beta(\varphi/\varphi_{\boldsymbol{X}} - t\varphi_t/\varphi_{\boldsymbol{X}}) - \boldsymbol{X}\varphi_t^2$	$\gamma = -1$
	$C^t = 2(-\beta t/\varphi_{\boldsymbol{X}}^2 + \varphi\varphi_t - t\varphi_t^2)$, $C^{\boldsymbol{X}} = 2\beta(\varphi - 2t\varphi_t)/\varphi_{\boldsymbol{X}}^3$	$\gamma = -3$
	$\boldsymbol{X}_2 = (\gamma-1)\boldsymbol{X}\, \partial_{\boldsymbol{X}} + (\gamma+1)\varphi\, \partial_\varphi$ $C^t = -2\beta t$, $C^{\boldsymbol{X}} = 2\beta \boldsymbol{X}$	$\gamma = -1$
	$C^t = (2/3)(-\varphi\varphi_t - 2\boldsymbol{X}\varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}})$, $C^{\boldsymbol{X}} = (2/3)(\boldsymbol{X}\varphi_t^2 - \beta\varphi\varphi_{\boldsymbol{X}}^{-1/3} + \beta\boldsymbol{X}\varphi_{\boldsymbol{X}}^{2/3})$	—
	$\boldsymbol{X}_3 = \partial_{\boldsymbol{X}}$ $C^t = \varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}}$, $C^{\boldsymbol{X}} = -\beta\ln\varphi_{\boldsymbol{X}} + \beta - \varphi_t^2/2$	$\gamma = -1$
	$C^t = \varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}}$, $C^{\boldsymbol{X}} = \beta\gamma(\gamma+1)^{-1}\varphi_{\boldsymbol{X}}^{\gamma+1} - \varphi_t^2/2$	$\gamma \neq -1$
M_{16}	$\boldsymbol{X}_1 = \partial_{\boldsymbol{X}}$ $C^t = \varphi_t\varphi_{\boldsymbol{X}}$, $C^{\boldsymbol{X}} = 3\beta/(2\varphi_{\boldsymbol{X}}^2) - \varphi_t^2/2$	—
	$\boldsymbol{X}_3 = t^2\, \partial_t + t\varphi\, \partial_\varphi$ $C^t = \beta t^2/(2\varphi_{\boldsymbol{X}}^2) + \varphi_t^2/2 - t\varphi\varphi_t + t^2\varphi_t^2/2$, $C^{\boldsymbol{X}} = \beta t(-\varphi + t\varphi_t)/\varphi_{\boldsymbol{X}}^3$	—
	$\boldsymbol{X}_4 = 2t\, \partial_t + \varphi\, \partial_\varphi$ $C^t = \beta t/\varphi_{\boldsymbol{X}}^2 - \varphi\varphi_t + t\varphi_t^2$, $C^{\boldsymbol{X}} = \beta(-\varphi + 2t\varphi_t)/\varphi_{\boldsymbol{X}}^3$	—
M_{17}	$C^t = -2tb(\boldsymbol{X})/\varphi_{\boldsymbol{X}}^2 + 2\varphi\varphi_t - 2t\varphi_t^2$, $C^{\boldsymbol{X}} = 2b(\boldsymbol{X})(\varphi - 2t\varphi_t)/\varphi_{\boldsymbol{X}}^3$	$\gamma = -3$
M_{18}	$\boldsymbol{X}_1 = t^2\, \partial_t + t\varphi\, \partial_\varphi$ $C^t = t^2 b(X)/(2\varphi_{\boldsymbol{X}}^2) + \varphi^2/2 - t\varphi\varphi_{\boldsymbol{X}} + t^2\varphi_t^2/2$, $C^{\boldsymbol{X}} = tb(\boldsymbol{X})(-\varphi + t\varphi_t)/\varphi_{\boldsymbol{X}}^3$	—
	$\boldsymbol{X}_2 = 2t\, \partial_t + \varphi\, \partial_\varphi$ $C^t = tb(\boldsymbol{X})/\varphi_{\boldsymbol{X}}^2 - \varphi\varphi_t + t\varphi_t^2$, $C^{\boldsymbol{X}} = b(\boldsymbol{X})(-\varphi + 2t\varphi_t)/\varphi_{\boldsymbol{X}}^3$	—

Заключение. В работе рассмотрены уравнения газовой динамики в лагранжевых координатах. Поскольку при естественном лагранжиане уравнения газовой динамики в лагранжевых координатах имеют вид уравнения Эйлера — Лагранжа, это позволило применить теорему Нетер для построения законов сохранения.

Выполнена полная групповая классификация уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах относительно функции $p(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}})$ при ограничениях $p_{\varphi_{\boldsymbol{X}}\varphi_{\boldsymbol{X}}} \neq 0$, $p_{\boldsymbol{X}} \neq 0$. Как и в случае политропного газа, групповая классификация уравнений газовой динамики в лагранжевых координатах существенно отличается от групповой классификации в эйлеровых координатах. Проведенная классификация использовалась для построения законов сохранения. При использовании теоремы Нетер ядро допустимых алгебр Ли $Y_1 = \partial_t$, $Y_2 = t\,\partial_\varphi$, $Y_3 = \partial_\varphi$ для произвольной функции $W(\rho, S)$ позволило получить известные законы сохранения: энергии, импульса и центра масс (закон сохранения массы выполняется в силу выбора лагранжевых координат). Для расширений ядра допустимых алгебр Ли сначала была найдена функция $W(\rho, S)$, соответствующая функции $p(\boldsymbol{X}, \varphi_{\boldsymbol{X}})$, найденной при групповой классификации, затем с использованием теоремы Нетер получены дополнительные законы сохранения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dorodnitsyn V. A., Kozlov R., Meleshko S. V.** Analysis of 1D gas dynamics equations of a polytropic gas in Lagrangian coordinates: symmetry classification, conservation laws, difference schemes // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2019. V. 74. P. 201–218.
2. **Noether E.** Invariante Variationsprobleme // Transport Theory Statist. Phys. 1971. V. 1, N 3. P. 186–207.
3. **Ibragimov N. H.** A new conservation theorem // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 333. P. 311–328.
4. **Webb G. M., Zank G. P.** Fluid relabelling symmetries, Lie point symmetries and the Lagrangian map in magnetohydrodynamics and gas dynamics // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V. 40. P. 545–579.
5. **Webb G. M., Zank G. P.** Scaling symmetries, conservation laws and action principles in one-dimensional gas dynamics // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. V. 42. 475205.
6. **Webb G. M.** Multi-symplectic, Lagrangian, one-dimensional gas dynamics // J. Math. Phys. 2015. V. 56. P. 1–20.
7. **Sjöberg A., Mahomed F. M.** Non-local symmetries and conservation laws for one-dimensional gas dynamics equations // Appl. Math. Comput. 2004. V. 150. P. 379–397.
8. **Гаврилюк С. Л., Шугрин С. М.** Среды с уравнениями состояния, зависящими от производных // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 35–49.
9. **Gavrilyuk S. L., Teshukov V. M.** Generalized vorticity for bubbly liquid and dispersive shallow water equations // Continuum Mech. Thermodynamics. 2001. V. 13. P. 365–382.
10. **Siriwat P., Kaewmanee C., Meleshko S. V.** Symmetries of the hyperbolic shallow water equations and the Green — Naghdi model in Lagrangian coordinates // Intern. J. Non-Linear Mech. 2016. V. 86. P. 185–195.
11. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.
12. **Черный Г. Г.** Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
13. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
14. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
15. **Anco S. C., Bluman G.** Integrating factors and first integrals for ordinary differential equations // Europ. J. Appl. Math. 1998. V. 9, N 3. P. 245–259.

16. **Ames W. F., Lohner R. J., Adams E.** Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Intern. J. Nonlinear Mech. 1981. V. 16. P. 439–447.
17. **Андреев В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1994.
18. **Bluman G. W., Kumei S.** On invariance properties of the wave equation // J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 307–318.
19. **Grimshaw R., Pelinovsky D., Pelinovsky E.** Homogenization of the variable-speed wave equation // Wave Motion. 2010. V. 47. P. 496–507.
20. **Kaptsov E. I., Meleshko S. V.** Analysis of the one-dimensional Euler — Lagrange equation of continuum mechanics with a Lagrangian of a special form // Appl. Math. Model. [Electron. resource]. Режим доступа: https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.09.014.
21. **Olver P. J.** Applications of Lie groups to differential equations. N. Y.: Springer-Verlag, 1986.
22. **Dorodnitsyn V. A., Kozlov R.** Lagrangian and Hamiltonian formalism for discrete equations: Symmetries and first integrals // Symmetries and integrability of difference equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2011. P. 7–49.
23. **Meleshko S. V.** Methods for constructing exact solutions of partial differential equations // Mathematical and analytical techniques with applications to engineering. N. Y.: Springer, 2005.

Поступила в редакцию 14/X 2019 г.,
после доработки — 14/X 2019 г.
Принята к публикации 28/X 2019 г.