УДК 539.3

ЗАТУХАНИЕ ВОЛН В СТЕРЖНЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ В МАТЕРИАЛЕ

Р. Г. Якупов

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа
E-mail: imran@anrb.ru

Исследовано затухание волн, распространяющихся в полубесконечном стержне, в результате гистерезисных потерь энергии деформации в материале. Приведены результаты численного решения.

Ключевые слова: стержень, волны, гистерезис, затухание.

В работе [1] рассмотрены волновые процессы в полубесконечном стержне, находящемся в упругой среде, при действии импульсной нагрузки $p(x,t)$, линейно распределенной на начальном участке $0 \leqslant x \leqslant a$. Запишем уравнения движения с учетом деформации сдвига и инерции вращения

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha W = p(x,t) - \rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial M}{\partial x} - Q = \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где $Q = k'GF(\theta - \partial W/\partial x)$, $M = EJ\,\partial\theta/\partial x$ — поперечная сила и изгибающий момент; θ, W — угол поворота и прогиб; x, t — продольная координата и время. В данной работе рассматривается затухание волн в стержне в результате гистерезисных потерь энергии в материале.

Зависимости между напряжениями и деформациями, описывающие петлю гистерезиса, представим в виде [2]

$$\overset{\rightleftarrows}{\sigma} = E\Big[\chi \pm \frac{3\delta_1}{8}\Big(\chi_a \mp 2\chi - \frac{\chi^2}{\chi_a}\Big)\Big]z, \qquad \overset{\rightleftarrows}{\tau} = k'G\Big[\varkappa \pm \frac{3\delta_2}{8}\Big(\varkappa_a \mp 2\varkappa - \frac{\varkappa^2}{\varkappa_a}\Big)\Big]. \tag{2}$$

Здесь χ, $\varkappa$ — деформации растяжения-сжатия и сдвига по нейтральной линии; χ_a, $\varkappa_a$ — их амплитуды; δ_1, δ_2 — декременты затухания колебаний при изгибе и сдвиге соответственно. При записи выражений (2) предполагается, что зависимость рассеяния энергии от нормальных и касательных напряжений отсутствует.

С использованием уравнений (1) находим деформации растяжения-сжатия и сдвига

$$\chi = \Big(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\rho}{k'G}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\Big)z, \qquad \varkappa = \frac{J}{k'GF}\Big(\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - E\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\Big),$$

с использованием соотношений (2) — момент и поперечную силу в стержне из материала с несовершенной упругостью:

$$M = EJ\frac{\partial\theta}{\partial x} + \varepsilon\overset{\rightleftarrows}{\Phi}, \qquad Q = k'GF\Big(\theta - \frac{\partial W}{\partial x}\Big) + \varepsilon\overset{\rightleftarrows}{\Psi}. \tag{3}$$

Здесь

$$\varepsilon \overset{\rightleftarrows}{\Phi} = \pm\frac{3\delta_1}{8}\,E\int\limits_F \Big(\chi_a \mp 2\chi - \frac{\chi^2}{\chi_a}\Big) z\,dF, \qquad \varepsilon \overset{\rightleftarrows}{\Psi} = \pm\frac{3\delta_2}{8}\,k'G\int\limits_F \Big(\varkappa_a \mp 2\varkappa - \frac{\varkappa^2}{\varkappa_a}\Big)\,dF \text{ —}$$

функционалы, учитывающие диссипацию энергии вследствие наличия внутреннего трения в материале; ε — малый параметр, обусловливающий малость функционалов и слабую нелинейность дифференциальных уравнений. В (2), (3) стрелка над σ, τ, Φ, Ψ, направленная вправо, и верхние знаки в правых частях соответствуют восходящей ветви петли гистерезиса, стрелка, направленная влево, и нижние знаки в правых частях — нисходящей ветви. Подставляя (3) в (1), получаем уравнения движения стержня, учитывающие рассеяние энергии гистерезисного типа и содержащие декремент затухания колебаний.

Используя безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{r}, \quad w = \frac{W}{r}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{r}, \quad \beta = \frac{r}{a}, \quad r^2 = \frac{J}{F}, \quad m = \frac{Mr}{EJ},$$

уравнения движения запишем в перемещениях в безразмерном виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \zeta w - \gamma\,\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \varepsilon\,\frac{\partial \Psi^*}{\partial \xi} = -k(1-\beta\xi)H(\tau), \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} - \theta - \gamma\Big(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}\Big) + \varepsilon\gamma\,\frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi} - \varepsilon\Psi^* = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} \varepsilon\Phi^* = \pm\frac{3\delta_1}{8}\Big(\chi_a^* \mp 2\chi^* - \frac{\chi^{*2}}{\chi_a^*}\Big), \qquad \varepsilon\Psi^* = \pm\frac{3\delta_2}{8}\Big(\varkappa_a^* \mp 2\varkappa^* - \frac{\varkappa^{*2}}{\varkappa_a^*}\Big), \\ \chi^* = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \gamma\,\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \qquad \varkappa^* = \gamma\Big(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}\Big), \end{gathered} \tag{5}$$

$\gamma = c_1^2/c_2^2$; $\zeta = \alpha r^2/(\rho F c_2^2)$; $k = p_0 r/(\rho F c_2^2)$; $c_1^2 = E/\rho$, $c_2^2 = k'G/\rho$ — скорости распространения продольной и поперечной волн соответственно. В уравнениях (4) и ниже стрелки над символами Φ^* и Ψ^* опускаются.

Уравнения (4) будем решать с использованием метода разложения в ряд по степеням малого параметра [2, 3]. Ограничиваясь первым приближением, запишем

$$w(\xi,\tau) = u\cos\varphi + \varepsilon w_1(u,\varphi) + \varepsilon^2\ldots, \qquad \theta(\xi,\tau) = v\cos\psi + \varepsilon\theta_1(v,\psi) + \varepsilon^2\ldots. \tag{6}$$

Здесь $w_1(u,\varphi), w_2(u,\varphi), \ldots$ и $\theta_1(v,\psi), \theta_2(v,\psi), \ldots$ — периодические функции с периодом 2π.

Функционалы Φ^* и Ψ^* также запишем в виде разложения в ряд Тейлора [2]

$$\begin{gathered} \varepsilon\Phi^*(w) = \varepsilon\Phi^*(u,\cos\varphi) + \varepsilon^2\Phi_u^{*\prime}(u,\cos\varphi)w_1\ldots + \varepsilon^3\ldots, \\ \varepsilon\Psi^*(\theta) = \varepsilon\Psi^*(v,\cos\psi) + \varepsilon^2\Psi_v^{*\prime}(v,\cos\psi)\theta_1\ldots + \varepsilon^3\ldots. \end{gathered}$$

Амплитуды u, v и фазы φ, ψ, входящие в ряды (6), являются функциями времени и определяются из дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{du}{d\tau} = \varepsilon A_1(u) + \varepsilon^2 A_3(u) + \ldots, \qquad &&\frac{d\varphi}{d\tau} = a_3 + \varepsilon B_1(u) + \varepsilon^2\ldots, \\ &\frac{dv}{d\tau} = \varepsilon A_2(v) + \varepsilon^2 A_4(v) + \ldots, \qquad &&\frac{d\psi}{d\tau} = \beta_1 + \varepsilon B_2(u) + \varepsilon^2\ldots. \end{aligned} \tag{7}$$

Из уравнений (7) следует, что за счет рассеяния энергии амплитуды уменьшаются и мгновенные частоты зависят от амплитуд.

Первые слагаемые в правых частях (6) представляют собой решения уравнений нулевого приближения (см. [1]). В обозначениях работы [1] выражения для прогиба и изгибающего момента имеют вид

$$w^0(\xi,\tau) = u\cos\varphi, \qquad m(\xi,\tau) = \frac{\partial\theta^0}{\partial\xi} = -\frac{k}{\gamma\zeta\nu}\sin\beta_1\xi, \tag{8}$$

где $u = k\gamma(1-\zeta)/(2\zeta^2)$; $\varphi = a_3\xi$; $a_3 = (\zeta/\gamma)^{1/2}$; $\beta_1 = [(a_3 - \zeta/2)/2]^{1/2}$; $\nu = [4/(\gamma\zeta) - 1]^{1/2}$.

Интегрируя второе выражение в (8), находим

$$\theta^0(\xi,\tau) = v\cos\psi, \qquad \psi = \beta_1\xi, \tag{9}$$

где $v = 2k/(\gamma\zeta\nu\beta_1)$ при $0 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$ и $v = k/(\gamma\zeta\nu\beta_1)$ при $\xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_1$.

Координата ξ и время τ связаны зависимостями

$$\xi = \begin{cases} \tau/\sqrt{\gamma}, & 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_2, \\ \tau, & \xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_1. \end{cases}$$

С использованием соотношений (5), (8), (9) находим деформации и функционалы

$$\chi^* = (\gamma - 1)a_3^2 u\cos\varphi, \qquad \varkappa^* = (\gamma - 1)\beta_1^2 v\cos\psi,$$

$$\varepsilon\Phi^* = \pm\frac{3}{8}\,\delta_1(\gamma - 1)a_3^2 u(1 \mp 2\cos\varphi - \cos^2\varphi), \quad \varepsilon\Psi^* = \pm\frac{3}{8}\,\delta_2(\gamma - 1)\beta_1^2 v(1 \mp 2\cos\psi - \cos^2\psi).$$

Из уравнений (4) находим два дифференциальных уравнения четвертого порядка относительно w и θ. Дифференцируя правую часть (6) по времени с учетом уравнений (7), подставляя полученные выражения в уравнения четвертого порядка относительно w, θ и сохраняя слагаемые, содержащие малый параметр в степени не выше первой, имеем

$$\begin{gathered} \frac{\partial^4 w_1}{\partial\xi^4} - \zeta\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial\xi^2} + \frac{\zeta}{\gamma}\,w_1 - (\gamma+1)\,\frac{\partial^4 w_1}{\partial\xi^2\,\partial\tau^2} + (1+\zeta)\,\frac{\partial^2 w_1}{\partial\tau^2} + \gamma\,\frac{\partial^4 w_1}{\partial\tau^4} = \\ = 2a_3(1-\zeta)(A_1\sin\varphi + uB_1\cos\varphi) - \gamma\Big(\frac{\partial^3\Psi^*}{\partial\xi\partial\,\tau^2} - \frac{\partial^3\Psi^*}{\partial\xi^3}\Big) - \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\xi^2}, \\ \frac{\partial^4\theta_1}{\partial\xi^4} - \zeta\,\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\xi^2} - \frac{\zeta}{\gamma}\,\theta_1 - (\gamma+1)\,\frac{\partial^4\theta_1}{\partial\xi^2\,\partial\tau^2} - (1-\zeta)\,\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\tau^2} + \gamma\,\frac{\partial^4\theta_1}{\partial\tau^4} + \\ + 2\beta_1(A_2\sin\psi + vB_2\cos\psi) = \frac{\zeta}{\gamma}\,\Psi^* + \frac{\partial^2\Psi^*}{\partial\tau^2} - \zeta\,\frac{\partial\Phi^*}{\partial\xi} - \gamma\,\frac{\partial^3\Phi^*}{\partial\xi\,\partial\tau^2} + \frac{\partial^3\Phi^*}{\partial\xi^3}. \end{gathered} \tag{10}$$

Уравнения второго приближения в данной работе не приводятся.

Согласно теории построения асимптотических решений [3] для функций $w_1(u,\varphi), \theta_1(v,\psi), \ldots,$ $A_1(u), B_1(u), \ldots$ и $A_2(v), B_2(v), \ldots$ принимаются ограничения в форме

$$\int\limits_0^{2\pi} w_i(u,\varphi)\begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Bmatrix} d\varphi = 0, \qquad \int\limits_0^{2\pi} \theta_i(v,\psi)\begin{Bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{Bmatrix} d\psi = 0.$$

Это означает, что в разложениях (6) в качестве полных амплитуд основных гармоник колебаний принимаются амплитуды u и v. Умножим первое уравнение в (10) на $\cos\varphi\,d\varphi$ и $\sin\varphi\,d\varphi$, второе уравнение — на $\cos\psi\,d\psi$ и $\sin\psi\,d\psi$ и выполним интегрирование. При вычислении интегралов использованы формулы интегрирования по частям и правило дифференцирования под знаком интеграла. В результате вычислений получаем

$$\varepsilon A_1 = -\frac{3(\gamma-1)a_3^3\delta_1 u}{4\pi(1-\zeta)}, \qquad \varepsilon B_1 = \frac{3(\gamma-1)a_3^3\delta_1 u}{8(1-\zeta)},$$
$$\varepsilon A_2 = -\frac{3\delta_2(\gamma-1)\beta_1 v}{16\pi}\Big(\frac{3\zeta}{4\gamma} + 4\beta_1^2\Big), \qquad \varepsilon B_2 = \frac{3\delta_2(\gamma-1)\beta_1}{8}\Big(-\frac{\zeta}{\gamma} + \beta_1^2\Big). \tag{11}$$

Подставляя выражения (11) в уравнения (7), интегрируя и требуя выполнения начальных условий, имеем

$$u = u_0\,\mathrm{e}^{-\eta_1\delta_1\tau}\cos{[(1+\mu_1\delta_1)a_3\tau]}, \qquad v = v_0\,\mathrm{e}^{-\eta_2\delta_2\tau}\cos{[(1+\mu_2\delta_2)\beta_1\tau]}, \tag{12}$$

где $\eta_1 = 3(\gamma-1)a_3^3/[4\pi(1-\zeta)]$; $\mu_1 = 3(\gamma-1)\zeta/(8\gamma)$; $\eta_2 = 3(\gamma-1)\beta_1^3/(4\pi)$; $\mu_2 = 3(\gamma-1)\beta_1^2/8$; $u_0 = u\big|_{\tau=0}$; $v_0 = v\big|_{\tau=0}$.

Изгибающий момент находим дифференцированием выражения для v по ξ:

$$m = m_0\,\mathrm{e}^{-\eta_2\delta_2\tau}\sin{[(1+\mu_2\delta_2)\beta_1\tau]}, \qquad m_0 = v_0\beta_1. \tag{13}$$

Результаты исследования сходимости рядов (6) показывают, что слагаемые εw_1, $\varepsilon\theta_1$ являются величинами первого порядка малости, поэтому решения первого приближения можно принять в форме $w = u\cos\varphi$, $\theta = v\cos\psi$. В явном виде эти решения аналогичны выражениям (12) и (13). При этом точность инженерных расчетов является удовлетворительной [3]. В расчетах малый параметр не используется, поэтому его физический смысл не уточняется.

Расчеты проводились при следующих данных: сечение стержня прямоугольное: $b = h = 0{,}1$ м, $F = b\times h = 0{,}1\times 0{,}1$ м; $p_0 = 40$ кН/м, материал стержня — сталь марки ст. 45, $E = 2\cdot 10^5$ МПа, $\rho = 8$ т/м^3, $\zeta = 1{,}35\cdot 10^{-2}$, $\varkappa = 1{,}8\cdot 10^{-6}$, $\beta = 0{,}1$, $\gamma = 3{,}1$. В стержне возникают напряжения $\sigma = 58$ МПа, $\tau = 22$ МПа, которым соответствуют логарифмические декременты колебаний $\delta_1 = 0{,}3$ %, $\delta_2 = 0{,}35$ % [4]. С увеличением напряжений декременты колебаний возрастают. При увеличении внешней нагрузки в три раза напряжения также увеличиваются в три раза, при этом декременты колебаний равны $\delta_1 = 0{,}8$ %, $\delta_2 = 0{,}7$ %. По формулам (12), (13) определялись амплитуды прогиба и изгибающего момента.

Амплитуды волн прогибов и напряжений уменьшаются в 10 раз за время $\tau = 4{,}9\cdot 10^6$ и $\tau = 2{,}3\cdot 10^5$ соответственно. За это время фронты продольных волн проходят расстояния, равные 140 и 6,7 км соответственно. При увеличении напряжений в три раза эти расстояния равны 50 и 4,8 км соответственно. На расстоянии от места приложения заданной внешней нагрузки, равном 10 км, амплитуда прогиба составляет 85 % начального значения, изгибающий момент — 3,2 %. В расчетах получены значения $\mu_1\delta_1 = 1{,}03\cdot 10^{-5}$ и $\mu_2\delta_2 = 0{,}91\cdot 10^{-4}$, т. е. частоты колебаний изменяются незначительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Якупов Р. Г.** Волны в стержне при действии импульсной нагрузки // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 178–184.
2. **Писаренко Г. С.** Обобщенная нелинейная модель учета рассеяния энергии при колебаниях. Киев: Наук. думка, 1985.
3. **Боголюбов Н. Н.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. М.: Наука, 1974.
4. **Писаренко Г. С.** Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справ. / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. Киев: Наук. думка, 1971.

Поступила в редакцию 6/XI 2008 г.,
в окончательном варианте — 11/III 2009 г.