

AMS subject classification: 49J20, 65N30

Априорные оценки ошибки P_0^2 – P_1 смешанных методов конечных элементов для класса нелинейных параболических уравнений*

Ч. Лиу¹, Т. Хой², Ж. Венг³

¹College of Science, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou, 425199, Hunan, China

²School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin, 132013, Jilin, China

³School of Mathematics Science, Huaqiao University, Quanzhou, 362021, Fujian, China

E-mails: liuchunmei8080@qq.com, 441808755@qq.com (Ч. Лиу), htlchb@163.com (Т. Хой), zfwmath@163.com (Ж. Венг)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 14, 2021.

Лиу Ч., Хой Т., Венг Ж. Априорные оценки ошибки P_0^2 – P_1 смешанных методов конечных элементов для класса нелинейных параболических уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 4. — С. 409–424.

В данной статье мы рассматриваем P_0^2 – P_1 смешанные конечно-элементные аппроксимации класса нелинейных параболических уравнений. Используется неявная схема Эйлера для временной дискретизации. Во-первых, определяется новая смешанная проекция и доказываются соответствующие априорные оценки ошибки. Во-вторых, получаются оптимальные априорные оценки ошибки для переменной давления и переменной скорости. Наконец, представлен численный пример для проверки теоретических результатов.

DOI: 10.15372/SJNM20210405

Ключевые слова: нелинейные параболические уравнения, P_0^2 – P_1 смешанный метод конечных элементов, априорные оценки ошибки, квадратное интегрируемое пространство.

Liu Ch., Hou T., and Weng Zh. A priori error estimates of P_0^2 – P_1 mixed finite element methods for a class of nonlinear parabolic equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 4. — P. 409–424.

In this paper, we consider P_0^2 – P_1 mixed finite element approximations of a class of nonlinear parabolic equations. The backward Euler scheme for temporal discretization is used. Firstly, a new mixed projection is defined and the related a priori error estimates are proved. Secondly, optimal a priori error estimates for pressure variable and velocity variable are derived. Finally, a numerical example is presented to verify the theoretical results.

Keywords: nonlinear parabolic equations, P_0^2 – P_1 mixed finite element method, a priori error estimates, square integrable function space.

*Работа первого автора поддержана Национальным фондом естественных наук Китая (№ 11901189), Ключевым проектом Департамента образования провинции Хунань (№ 19A191) и программой прикладных дисциплин Хунаньского университета науки и техники. Работа второго автора поддержана Научно-техническим исследовательским проектом Департамента образования провинции Цзилинь (№ JJKH20190634KJ). Работа третьего автора поддержана Национальным фондом естественных наук Китая (№ 11701197) и Программой для учителей молодого и среднего возраста в области науки и технологий Университета Хуацяо (№ ZQN-YX502).

1. Введение

Смешанные методы конечных элементов, в которых два пространства используются для аппроксимации двух различных переменных, широко используются для решения уравнений в частных производных. Обычно вторая переменная вводится, поскольку она представляет интерес с физической точки зрения и обычно связана с некоторыми производными исходной переменной. Математический анализ и применения смешанных методов конечных элементов получили широкое развитие начиная с 1970-х годов. Общий анализ этого типа методов был впервые разработан Бреucci [1]. Мы также отсылаем читателя к книге [3].

С развитием метода конечных элементов были предложены некоторые новые смешанные методы конечных элементов. Пани и Гейрвезер [15] представили H^1 -смешанный метод конечных элементов Галеркина для линейных параболических и параболических интегро-дифференциальных уравнений. Пехливанов с соавторами [16] разработали смешанный метод конечных элементов наименьших квадратов для решения эллиптических задач и обсудили априорные оценки ошибки. Чен и Чен [6] разработали P_0^2 - P_1 смешанный метод конечных элементов для решения эллиптических задач. По сравнению с классическим смешанным методом конечных элементов Равьяра-Томе, скорость P_0^2 - P_1 смешанного метода конечных элементов не только принадлежит пространству функций, интегрируемых с квадратом вместо классического $H(\operatorname{div}; \Omega)$ пространства, но также требует меньшей регулярности и меньших степеней свободы. Оба метода имеют одинаковую скорость сходимости в L^2 -норме. Однако скорость сходимости L^2 -нормы давления P_0^2 - P_1 смешанного метода конечных элементов на порядок выше, чем у смешанного метода конечных элементов Равьяра-Томе самого низкого порядка. Венг с соавторами [25] рассматривали P_0^2 - P_1 смешанные конечно-элементные аппроксимации Кранка-Николсон линейных параболических задач. Ши с соавторами [19–21] применили P_0^2 - P_1 смешанный метод конечных элементов для решения нелинейных параболических уравнений и нелинейных уравнений Шредингера.

В последние годы было разработано множество численных методов решения нелинейных параболических уравнений (см., например, [5, 9, 11, 12, 14]). Кэннон и Линь [5] исследовали априорные оценки ошибки полудискретных и конечно-элементных аппроксимаций Кранка-Николсон решений нелинейных уравнений диффузии с памятью. Эрикссон и Джонсон [9] обсудили применение адаптивных методов конечных элементов для параболических задач к классу нелинейных скалярных задач. Гарсия [11] получил оценки L^2 -ошибки полудискретных смешанных методов Равьяра-Томе для квазилинейных параболических уравнений второго порядка. Затем Гарсия [12] проанализировал полностью дискретную схему. Ни и Томе [14] рассмотрели конечно-элементную аппроксимацию с сосредоточенными массами к нелинейной параболической задаче второго порядка и обсудили априорные оценки ошибки. Также имеются работы по двухсеточному методу в сочетании с различными численными методами для нелинейных параболических уравнений (см., например, [4, 8, 24]). Доусон с соавторами [8] представили двухсеточную конечно-разностную схему для нелинейных параболических уравнений. Ву и Аллен [24] разработали двухшаговый алгоритм с использованием идеи двух сеток для полулинейных уравнений реакции-диффузии с расширенным смешанным методом конечных элементов. Чен и Чен [4] рассмотрели двухсеточный метод для смешанных методов конечных элементов для полностью нелинейных уравнений реакции-диффузии. Хоу с соавторами [13] представили двухсеточную дискретную схему P_0^2 - P_1 смешанных методов конечных элементов вместе со схемой Кранка-Николсон для нелинейных параболических уравнений.

Мы используем стандартное обозначение $W^{m,p}(\Omega)$ для пространств Соболева в области Ω и обозначаем через $L^s(J; W^{m,p}(\Omega))$ Банахово пространство всех L^s интегрируемых функций из J в $W^{m,p}(\Omega)$ с нормой $\|v\|_{L^s(J; W^{m,p}(\Omega))} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_{W^{m,p}(\Omega)}^s dt \right)^{\frac{1}{s}}$ для $s \in [1, \infty)$ и стандартной модификацией для $s = \infty$. Для простоты представления $\|v\|_{L^s(J; W^{m,p}(\Omega))}$ обозначим как $\|v\|_{L^s(W^{m,p})}$. Аналогичным образом можно определить пространства $H^1(J; W^{m,p}(\Omega))$ и $C^k(J; W^{m,p}(\Omega))$. Кроме того, C обозначает общую положительную постоянную, не зависящую от h и Δt , где h — пространственный размер сетки и Δt — шаг по времени.

Рассмотрим следующие нелинейные параболические уравнения:

$$y_t - \operatorname{div}(a(y)\nabla y) = f(y), \quad x \in \Omega, \quad t \in J, \quad (1.1)$$

$$y(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in J, \quad (1.2)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.3)$$

где $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — выпуклая многоугольная область с границей $\partial\Omega$, $J = (0, T]$, $f(y) = f(y, x, t)$, $a(y) = a(y, x)$ и $y_0(x) \in H^2(\Omega)$ — три заданные действительные функции на Ω . Сделаем следующие предположения:

(K₁) имеются две постоянные: c_1 и $c_2 > 0$, удовлетворяющие $c_1 \leq a(y, x) \leq c_2$ для любого вектора $x \in \Omega$;

(K₂) существует положительная постоянная M такая, что

$$|a'(y)| + |a''(y)| + |(a^{-1})'(y)| + |(a^{-1})''(y)| + |f'(y)| \leq M, \quad y \in \mathbf{R}.$$

В данной статье мы будем рассматривать априорные оценки ошибки $P_0^2 - P_1$ смешанных методов конечных элементов [6] вместе с неявной схемой Эйлера для нелинейной параболической задачи (1.1)–(1.3). В качестве эллиптической проекции, представленной в [23], мы введем новую смешанную эллиптическую проекцию, которая играет важную роль в восстановлении оптимальных априорных оценок ошибки.

Статья построена следующим образом. В пункте 2 будет построена полностью дискретизированная смешанная конечно-элементная аппроксимация задачи (1.1)–(1.3). В п. 3 мы определим новую смешанную эллиптическую проекцию и обсудим априорные оценки ошибок всех переменных. В п. 4 мы приведем численный пример для проверки теоретических результатов. В заключение, в последнем пункте, мы подведем итоги и представим возможное развитие.

2. Полностью дискретизированная смешанная конечно-элементная схема

В данном пункте мы дадим полностью дискретизированную $P_0^2 - P_1$ смешанную конечно-элементную аппроксимацию задачи (1.1)–(1.3).

Пусть $\mathbf{V} = (L^2(\Omega))^2$ и $W = H_0^1(\Omega)$. Положим $\mathbf{p} = a(y)\nabla y$ как в [6]. Тогда мы получим смешанную вариационную форму (1.1):

$$(a^{-1}(y) \mathbf{p}, \mathbf{v}) - (\nabla y, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.1)$$

$$(y_t, w) + (\mathbf{p}, \nabla w) = (f(y), w) \quad \forall w \in W, \quad (2.2)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Пусть $\mathcal{T}_h$ обозначает регулярную триангуляцию многоугольной области Ω , h_τ — диаметр элемента τ ($\tau \in \mathcal{T}_h$) и $h = \max h_\tau$. Пусть $\mathbf{V}_h \times W_h \subset \mathbf{V} \times W$ определяется следующей парой конечных элементов P_0^2 – P_1 [6, 22]:

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v}_h = (v_{1h}, v_{2h}) \in \mathbf{V} : (v_{1h}, v_{2h})|_{\tau} \in P_0(\tau)^2 \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_h\},$$

$$W_h = \{w_h \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W : w_h|_{\tau} \in P_1(\tau) \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_h\}.$$

Прежде чем представить P_0^2 – P_1 смешанную конечно-элементную схему, введем три проекционных оператора. Сначала определим стандартную эллиптическую проекцию [7] $P_h : W \rightarrow W_h$, которая удовлетворяет для любого $\phi \in W$:

$$(\nabla(\phi - P_h\phi), \nabla w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.3)$$

$$\|\phi - P_h\phi\|_s \leq Ch^{2-s}\|\phi\|_2, \quad s = 0, 1 \quad \forall \phi \in H^2(\Omega). \quad (2.4)$$

Затем определим стандартную L^2 проекцию [2] $\Pi_h : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_h$, которая удовлетворяет для любого $\mathbf{q} \in \mathbf{V}$:

$$(\mathbf{q} - \Pi_h\mathbf{q}, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (2.5)$$

$$\|\Pi_h\mathbf{q}\|_{0,s} \leq C\|\mathbf{q}\|_{0,s}, \quad 2 \leq s \leq +\infty, \quad (2.6)$$

$$\|\mathbf{q} - \Pi_h\mathbf{q}\|_{0,s} \leq Ch\|\mathbf{q}\|_{1,s} \quad \forall \mathbf{q} \in (W^{1,s}(\Omega))^2, \quad 2 \leq s \leq +\infty. \quad (2.7)$$

Наконец, определим новую смешанную эллиптическую проекцию $(\mathbf{P}, Y) \in \mathbf{V}_h \times W_h$ следующим образом:

$$(a^{-1}(y)(\mathbf{p} - \mathbf{P}), \mathbf{v}_h) - (\nabla(y - Y), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (2.8)$$

$$(\mathbf{p} - \mathbf{P}, \nabla w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h. \quad (2.9)$$

Для доказательства существования и единственности смешанной эллиптической проекции см. ссылку [3].

Теперь рассмотрим полностью дискретную смешанную конечно-элементную схему. Пусть $\Delta t > 0$, $N = T/\Delta t \in \mathbb{Z}$ и $t_n = n\Delta t$, $n \in \mathbb{Z}$. Также пусть

$$\psi^n = \psi^n(x) = \psi(x, t_n), \quad \partial\psi^n = \frac{\psi^n - \psi^{n-1}}{\Delta t}.$$

Тогда полностью дискретная схема аппроксимации заключается в нахождении $(\mathbf{p}_h^n, y_h^n) \in \mathbf{V}_h \times W_h$, $n = 1, 2, \dots, N$, так что

$$(a^{-1}(y_h^n)\mathbf{p}_h^n, \mathbf{v}_h) - (\nabla y_h^n, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (2.10)$$

$$(\partial y_h^n, w_h) + (\mathbf{p}_h^n, \nabla w_h) = (f(y_h^n), w_h) \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.11)$$

$$y_h^0 = Y^0(x), \quad (2.12)$$

где Y^0 — эллиптическая проекция $y_0(x)$.

Для доказательства существования и единственности решения нелинейной алгебраической системы (2.10)–(2.12) см. ссылку [2].

3. Оптимальные априорные оценки ошибки

Получим оптимальные априорные оценки ошибки задачи (1.1)–(1.3). Сначала напомним результат Грисварда [10].

Лемма 3.1 [10]. Для каждой функции $F \in L^2(\Omega)$ решение ϕ для

$$-\operatorname{div}(a(y^n)\nabla\phi) = F \text{ в } \Omega, \quad \phi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3.1)$$

принадлежит $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Кроме того, существует положительная постоянная C такая, что

$$\|\phi\|_2 \leq C\|F\|. \quad (3.2)$$

Далее обсудим априорные оценки ошибки между точными решениями и их смешанными эллиптическими проекциями в следующих двух леммах.

Лемма 3.2. Пусть (P, Y) — новая смешанная эллиптическая проекция, определенная в (2.8), (2.9), а (p, y) — решение (2.1), (2.2) соответственно. Тогда для каждого $1 \leq n \leq N$ мы имеем

$$\|p^n - P^n\| + \|\nabla(y^n - Y^n)\| \leq Ch(\|y^n\|_2 + \|p^n\|_1), \quad (3.3)$$

$$\|y^n - Y^n\| \leq Ch^2(\|y^n\|_2 + \|p^n\|_1). \quad (3.4)$$

Доказательство. Возьмем $t = t_n$ в (2.8), (2.9). Тогда мы имеем

$$(a^{-1}(y^n)(p^n - P^n), v_h) - (\nabla(y^n - Y^n), v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h, \quad (3.5)$$

$$(p^n - P^n, \nabla w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h. \quad (3.6)$$

Заметим, что $\nabla W_h \subset V_h$. Используя (2.5), перепишем (3.5), (3.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} (a^{-1}(y^n)(\Pi_h p^n - P^n), v_h) - (\nabla(P_h y^n - Y^n), v_h) \\ = (\nabla(y^n - P_h y^n), v_h) - (a^{-1}(y^n)(p^n - \Pi_h p^n), v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$(\Pi_h p^n - P^n, \nabla w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h. \quad (3.8)$$

Выберем $v_h = \Pi_h p^n - P^n$ и $w_h = P_h y^n - Y^n$ в (3.7) и (3.8) соответственно. Затем сложим два полученных уравнения и получим

$$\|a^{-\frac{1}{2}}(y^n)(\Pi_h p^n - P^n)\|^2 = (\nabla(y^n - Y^n) - a^{-1}(y^n)(p^n - \Pi_h p^n), \Pi_h p^n - P^n). \quad (3.9)$$

В силу (3.9), неравенства Коши, предположения относительно a^{-1} , (2.4) и (2.7) мы имеем

$$\|\Pi_h p^n - P^n\| \leq Ch(\|p^n\|_1 + \|y^n\|_2). \quad (3.10)$$

Положим $v_h = \nabla(P_h y^n - Y^n)$ в (3.7). Тогда, с использованием (2.4), (2.7), неравенства Коши и предположения по a , найдем, что

$$\|\nabla(P_h y^n - Y^n)\| \leq Ch(\|p^n\|_1 + \|y^n\|_2) + C\|\Pi_h p^n - P^n\|. \quad (3.11)$$

Пусть ϕ — решение (3.1) при $F = y^n - Y^n$. Используя (3.1), формулу Грина, (2.4), (2.7), (3.5), (3.6), неравенство Коши и предположение относительно a , мы видим, что

$$\begin{aligned}
\|y^n - Y^n\|^2 &= (y^n - Y^n, -\operatorname{div}(a(y^n)\nabla\phi)) = (a(y^n)\nabla\phi, \nabla(y^n - Y^n)) \\
&= (\nabla(y^n - Y^n), a(y^n)\nabla\phi - \Pi_h(a(y^n)\nabla\phi)) + (\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n, \nabla(\phi - P_h\phi)) + \\
&\quad (a^{-1}(y^n)(\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n), \Pi_h(a(y^n)\nabla\phi) - a(y^n)\nabla\phi) \\
&\leq Ch\|\nabla(y^n - Y^n)\| \cdot \|a\|_{1,\infty}\|\phi\|_2 + Ch\|\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n\| \cdot \|\phi\|_2 \\
&\leq Ch(\|\nabla(y^n - Y^n)\| + \|\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n\|)\|\phi\|_2.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Объединив (2.4), (2.7), (3.2), (3.10)–(3.12) с неравенством треугольника, мы завершаем доказательство леммы. $\square$

Лемма 3.3. Пусть $(\mathbf{P}, Y)$ — новая смешанная эллиптическая проекция, определенная в (2.8), (2.9), и пусть $(\mathbf{p}, y)$ — решение (2.1), (2.2) соответственно. Тогда для каждого $1 \leq n \leq N$ мы имеем

$$\|\partial(\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n)\| + \|\nabla\partial(y^n - Y^n)\| \leq C\|\nabla\partial(y^n - P_h y^n)\| + C\|\partial(\mathbf{p}^n - \Pi_h \mathbf{p}^n)\| + Ch(\|\mathbf{p}^{n-1}\|_1 + \|y^{n-1}\|_2), \tag{3.13}$$

$$\|\partial(y^n - Y^n)\| \leq Ch(\|\nabla\partial(y^n - P_h y^n)\| + \|\partial(\mathbf{p}^n - \Pi_h \mathbf{p}^n)\|) + Ch^2(\|\mathbf{p}^{n-1}\|_1 + \|y^{n-1}\|_2). \tag{3.14}$$

Доказательство. Возьмем разность по времени (3.5), (3.6) для получения

$$\left(\frac{a^{-1}(y^n)(\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n) - a^{-1}(y^{n-1})(\mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{P}^{n-1})}{\Delta t}, \mathbf{v}_h \right) - (\nabla\partial(y^n - Y^n), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \tag{3.15}$$

$$(\partial(\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n), \nabla w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h. \tag{3.16}$$

Используя (2.5), перепишем (3.15), (3.16) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(a^{-1}(y^n)\partial(\Pi_h \mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n), \mathbf{v}_h) - (\nabla\partial(P_h y^n - Y^n), \mathbf{v}_h) \\
&= (\nabla\partial(y^n - P_h y^n), \mathbf{v}_h) - (a^{-1}(y^n)\partial(\mathbf{p}^n - \Pi_h \mathbf{p}^n), \mathbf{v}_h) - \\
&\quad \left(\frac{a^{-1}(y^n) - a^{-1}(y^{n-1})}{\Delta t} (\mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{P}^{n-1}), \mathbf{v}_h \right) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$(\partial(\Pi_h \mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n), \nabla w_h) = 0 \quad \forall w_h \in W_h. \tag{3.18}$$

Возьмем $\mathbf{v}_h = \partial(\Pi_h \mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n)$ в (3.17) и $w_h = \partial(P_h y^n - Y^n)$ в (3.18) соответственно. Сложив два полученных уравнения, используя неравенство Коши и предположение относительно a , получим

$$\begin{aligned}
\|\partial(\Pi_h \mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n)\| &\leq C\|\nabla\partial(y^n - P_h y^n)\| + C\|a^{-1}\|_{0,\infty}\|\partial(\mathbf{p}^n - \Pi_h \mathbf{p}^n)\| + \\
&\quad C\|a^{-1}\|_{1,\infty}\|y_t\|_{L^\infty(H^2)}\|\mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{P}^{n-1}\|,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

где мы использовали

$$|a^{-1}(y^n) - a^{-1}(y^{n-1})| = |(a^{-1})'(y^{n*})y_t(\beta^n)\Delta t| \leq \Delta t\|a^{-1}\|_{1,\infty}\|y_t\|_{L^\infty(L^\infty)}, \tag{3.20}$$

где y^{n*} расположено между y^n и y^{n-1} , β^n расположено между t_n и t_{n-1} .

Аналогичным образом возьмем $\mathbf{v}_h = \nabla\partial(P_h y^n - Y^n)$ в (3.17). Тогда мы получим

$$\begin{aligned}
\|\nabla\partial(P_h y^n - Y^n)\| &\leq C\|a^{-1}\|_{1,\infty}\|y_t\|_{L^\infty(L^\infty)}\|\mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{P}^{n-1}\| + C\|a^{-1}\|_{0,\infty}\|\partial(\mathbf{p}^n - \Pi_h \mathbf{p}^n)\| + \\
&\quad C\|\nabla\partial(y^n - P_h y^n)\| + C\|a^{-1}\|_{0,\infty}\|\partial(\Pi_h \mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n)\|.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Пусть ϕ — решение (3.1) при $F = \partial(y^n - Y^n)$. Используя (3.1), формулу Грина и (3.15), (3.16), найдем, что

$$\begin{aligned}
\|\partial(y^n - Y^n)\|^2 &= (\nabla \partial(y^n - Y^n), a(y^n) \nabla \phi) = (\nabla \partial(y^n - Y^n), a(y^n) \nabla \phi - \Pi_h(a(y^n) \nabla \phi)) + \\
&\quad \left(\frac{a^{-1}(y^n)(\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n) - a^{-1}(y^{n-1})(\mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{P}^{n-1})}{\Delta t}, \Pi_h(a(y^n) \nabla \phi) \right) \\
&= (a^{-1}(y^n) \partial(\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n), \Pi_h(a(y^n) \nabla \phi) - a(y^n) \nabla \phi) + \\
&\quad (\partial(\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n), \nabla(\phi - P_h \phi)) + (\nabla \partial(y^n - Y^n), a(y^n) \nabla \phi - \Pi_h(a(y^n) \nabla \phi)) + \\
&\quad \left(\frac{a^{-1}(y^n) - a^{-1}(y^{n-1})}{\Delta t} (\mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{P}^{n-1}), \Pi_h(a(y^n) \nabla \phi) - a(y^n) \nabla \phi \right) + \\
&\quad \left(\frac{a^{-1}(y^n) - a^{-1}(y^{n-1})}{\Delta t} (\mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{P}^{n-1}), a(y^n) \nabla \phi \right). \tag{3.22}
\end{aligned}$$

В силу (3.5) и формулы Грина разложим последний член (3.22) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a^{-1}(y^n) - a^{-1}(y^{n-1})}{\Delta t} (\mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{P}^{n-1}), a(y^n) \nabla \phi \right) \\
&= \left(a^{-1}(y^{n-1})(\mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{P}^{n-1}), \frac{a(y^{n-1}) - a(y^n)}{\Delta t} \nabla \phi - \Pi_h \left(\frac{a(y^{n-1}) - a(y^n)}{\Delta t} \nabla \phi \right) \right) + \\
&\quad \left(\nabla(y^{n-1} - Y^{n-1}), \Pi_h \left(\frac{a(y^{n-1}) - a(y^n)}{\Delta t} \nabla \phi \right) - \frac{a(y^{n-1}) - a(y^n)}{\Delta t} \nabla \phi \right) - \\
&\quad \left(y^{n-1} - Y^{n-1}, \operatorname{div} \left(\frac{a(y^{n-1}) - a(y^n)}{\Delta t} \nabla \phi \right) \right). \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Аналогично (3.20) мы видим, что

$$a(y^n) - a(y^{n-1}) = a'(\dot{y}^n)(y^n - y^{n-1}) = a'(\dot{y}^n) y_t(\beta^n) \Delta t, \tag{3.24}$$

где $\dot{y}^n$ расположено между y^n и y^{n-1} .

Теперь используя неравенство Коши, (2.7), (3.20) и (3.22)–(3.24), найдем, что

$$\begin{aligned}
\|\partial(y^n - Y^n)\|^2 &\leq Ch \|a^{-1}\|_{0,\infty} \|\partial(\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n)\| \cdot \|a\|_{1,\infty} \|\phi\|_2 + Ch \|a\|_{1,\infty} \|\nabla \partial(y^n - Y^n)\| \cdot \|\phi\|_2 + \\
&\quad Ch \|\partial(\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n)\| \cdot \|\phi\|_2 + Ch \|a^{-1}\|_{1,\infty} \|y_t\|_{L^\infty(L^\infty)} \|\mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{P}^{n-1}\| \cdot \|a\|_{1,\infty} \|\phi\|_2 + \\
&\quad Ch \|a^{-1}\|_{0,\infty} \|\mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{P}^{n-1}\| \cdot \|a\|_{2,\infty} \|y_t\|_{L^\infty(W^{1,\infty})} \|\phi\|_2 + \\
&\quad Ch \|\nabla(y^{n-1} - Y^{n-1})\| \cdot \|a\|_{2,\infty} \|y_t\|_{L^\infty(W^{1,\infty})} \|\phi\|_2 + \\
&\quad C \|y^{n-1} - Y^{n-1}\| \cdot \|a\|_{2,\infty} \|y_t\|_{L^\infty(W^{1,\infty})} \|\phi\|_2. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Используя (2.4), (2.7), (3.2)–(3.4), (3.25), (3.19), (3.21) и неравенства треугольника, мы завершаем доказательство леммы. $\square$

Для удобства пусть

$$\xi_{\mathbf{p}}^n = \mathbf{P}^n - \mathbf{p}_h^n, \quad \xi_y^n = Y^n - y_h^n, \quad \eta_{\mathbf{p}}^n = \mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n, \quad \eta_y^n = y^n - Y^n$$

для $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

Перед проверкой сходимости полностью дискретизированной схемы (2.10)–(2.12) представим дискретное неравенство Гронуолла.

Лемма 3.4 [17]. *Предположим, что $\{k_n\}$ и $\{\alpha_n\}$ — неотрицательные последовательности и последовательность ϕ_n удовлетворяют:*

$$\phi_0 \leq g_0, \quad \phi_n \leq g_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l + \sum_{l=0}^{n-1} k_l \phi_l, \quad n \geq 1,$$

где $g_0 \geq 0$. Тогда последовательность $\{\phi_n\}$ удовлетворяет:

$$\phi_n \leq \left(g_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l \right) \exp \left(\sum_{l=0}^{n-1} k_l \right), \quad n \geq 1.$$

Теорема 3.1. Пусть y и y_h^n — решения (2.1), (2.2) и (2.10)–(2.12) соответственно. Предположим, что $y \in L^\infty(H^2)$, $y_t \in L^2(H^2) \cap L^\infty(W^{1,\infty})$, $y_{tt} \in L^2(L^2)$, $\mathbf{p} \in L^\infty(H^1)$, $\mathbf{p}_t \in L^\infty(H^1) \cap L^\infty(L^\infty)$. Тогда для достаточно малого Δt и $1 \leq n \leq N$ мы имеем

$$\|y^n - y_h^n\| \leq C(\Delta t + h^2). \quad (3.26)$$

Доказательство. С использованием (2.1), (2.2) и (2.8)–(2.11), имеем следующие уравнения для ошибки:

$$(a^{-1}(y_h^n) \xi_{\mathbf{p}}^n, \mathbf{v}_h) - (\nabla \xi_y^n, \mathbf{v}_h) = -((a^{-1}(y^n) - a^{-1}(y_h^n)) \mathbf{P}^n, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (3.27)$$

$$(\partial \xi_y^n, w_h) + (\xi_{\mathbf{p}}^n, \nabla w_h) = (f(y^n) - f(y_h^n) + \partial y^n - y_t^n - \partial \eta_y^n, w_h) \quad \forall w_h \in W_h. \quad (3.28)$$

Возьмем $\mathbf{v}_h = \xi_{\mathbf{p}}^n$ в (3.27) и $w_h = \xi_y^n$ в (3.28) соответственно. Сложив два полученных уравнения, получим

$$\begin{aligned} (\partial \xi_y^n, \xi_y^n) + (a^{-1}(y_h^n) \xi_{\mathbf{p}}^n, \xi_{\mathbf{p}}^n) &= (f(y^n) - f(y_h^n), \xi_y^n) + (\partial y^n - y_t^n, \xi_y^n) - (\partial \eta_y^n, \xi_y^n) - \\ &\quad ((a^{-1}(y^n) - a^{-1}(y_h^n)) \mathbf{P}^n, \xi_{\mathbf{p}}^n). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Легко убедиться в том, что

$$(\partial \xi_y^n, \xi_y^n) \geq \frac{1}{2\Delta t} (\|\xi_y^n\|^2 - \|\xi_y^{n-1}\|^2). \quad (3.30)$$

Умножив Δt и суммируя по n от 1 до l ($1 \leq l \leq N$) в обеих частях (3.29), используя (3.30), предположение относительно a и $\xi_y^0 = 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} \|\xi_y^l\|^2 + \sum_{n=1}^l \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 \Delta t &\leq C \sum_{n=1}^l \Delta t (f(y^n) - f(y_h^n), \xi_y^n) + C \sum_{n=1}^l \Delta t (\partial y^n - y_t^n, \xi_y^n) - \\ &\quad C \sum_{n=1}^l \Delta t (\partial \eta_y^n, \xi_y^n) - C \sum_{n=1}^l \Delta t ((a^{-1}(y^n) - a^{-1}(y_h^n)) \mathbf{P}^n, \xi_{\mathbf{p}}^n) =: \sum_{i=1}^4 I_i. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Теперь оценим члены в правой части (3.31) для I_1 , с использованием неравенства Коши, неравенства Юнга и предположения относительно f , мы заключаем, что

$$|I_1| = \left| C \sum_{n=1}^l \Delta t (f'(\hat{y}^n)(y^n - y_h^n), \xi_y^n) \right| \leq C \sum_{n=1}^l \|\eta_y^n\|^2 \Delta t + C \sum_{n=1}^l \|\xi_y^n\|^2 \Delta t, \quad (3.32)$$

где $\hat{y}^n$ расположено между y^n и y_h^n .

Для I_2 из результатов, представленных в [18], мы имеем

$$|I_2| \leq C \sum_{n=1}^l \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|y_{tt}\| dt \right)^2 \Delta t + C \sum_{n=1}^l \|\xi_y^n\|^2 \Delta t \leq C(\Delta t)^2 \|y_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + C \sum_{n=1}^l \|\xi_y^n\|^2 \Delta t. \quad (3.33)$$

Для I_3 из неравенства Коши и неравенства Юнга следует, что

$$|I_3| \leq C \sum_{n=1}^l \|\partial \eta_y^n\|^2 \Delta t + C \sum_{n=1}^l \|\xi_y^n\|^2 \Delta t. \quad (3.34)$$

Из (2.6), (3.10), обратного неравенства и неравенства треугольника следует, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}^n\|_{0,\infty} &\leq \|\Pi_h \mathbf{p}^n\|_{0,\infty} + \|\Pi_h \mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n\|_{0,\infty} \leq C\|\mathbf{p}^n\|_{0,\infty} + Ch^{-1} \|\Pi_h \mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n\| \\ &\leq C(\|\mathbf{p}\|_{L^\infty(L^\infty)} + \|\mathbf{p}\|_{L^\infty(H^1)} + \|y\|_{L^\infty(H^2)}) \leq C. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Наконец, с использованием неравенства Коши, неравенства Юнга, (3.35) и предположения относительно a , оценим I_4 следующим образом:

$$\begin{aligned} |I_4| &= \left| C \sum_{n=1}^l \Delta t \left((a^{-1}(y^n) - a^{-1}(Y^n)) \mathbf{P}^n + (a^{-1}(Y^n) - a^{-1}(y_h^n)) \mathbf{P}^n, \xi_{\mathbf{p}}^n \right) \right| \\ &\leq C \|a^{-1}\|_{1,\infty}^2 \sum_{n=1}^l \|\mathbf{P}^n\|_{0,\infty}^2 (\|\eta_y^n\|^2 + \|\xi_y^n\|^2) \Delta t + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^l \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 \Delta t \\ &\leq C \sum_{n=1}^l (\|\eta_y^n\|^2 + \|\xi_y^n\|^2) \Delta t + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^l \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 \Delta t. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Теперь для достаточно малого Δt , объединив (3.31)–(3.34), (3.36) с дискретным неравенством Гронуолла (см. лемму 3.4), мы заключаем, что

$$\|\xi_y^l\|^2 + \sum_{n=1}^l \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 \Delta t \leq C(\Delta t)^2 \|y_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + C \sum_{n=1}^l (\|\eta_y^n\|^2 + \|\partial \eta_y^n\|^2) \Delta t. \quad (3.37)$$

Используя (3.4), (3.14), (3.37) и неравенство треугольника, завершим доказательство теоремы. $\square$

Теорема 3.2. Пусть $(\mathbf{p}, y)$ и $(\mathbf{p}_h^n, y_h^n)$ — решения (2.1), (2.2) и (2.10)–(2.12) соответственно. Предположим, что $y \in L^\infty(H^2)$, $y_t \in L^2(H^2) \cap L^\infty(W^{1,\infty})$, $y_{tt} \in L^2(L^2)$, $\mathbf{p} \in L^\infty(H^1)$, $\mathbf{p}_t \in L^\infty(H^1) \cap L^\infty(L^\infty)$. Тогда для достаточно малого Δt и $1 \leq n \leq N$ мы имеем

$$\|\nabla(y^n - y_h^n)\| + \|\mathbf{p}^n - \mathbf{p}_h^n\| \leq C(\Delta t + h). \quad (3.38)$$

Доказательство. Возьмем разность по времени (3.27) для получения

$$\begin{aligned} &(a^{-1}(y_h^n) \partial \xi_{\mathbf{p}}^n, \mathbf{v}_h) - (\nabla \partial \xi_y^n, \mathbf{v}_h) \\ &= - \left(\frac{(a^{-1}(y^n) - a^{-1}(y_h^n)) \mathbf{P}^n - (a^{-1}(y^{n-1}) - a^{-1}(y_h^{n-1})) \mathbf{P}^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{v}_h \right) - \\ &\quad \left(\frac{(a^{-1}(y_h^n) - a^{-1}(y_h^{n-1})) \xi_{\mathbf{p}}^{n-1}}{\Delta t}, \mathbf{v}_h \right) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Выберем $\mathbf{v}_h = \xi_{\mathbf{p}}^n$ в (3.39) и $w_h = \partial \xi_y^n$ в (3.28) соответственно. Сложим два полученных уравнения и получим

$$\begin{aligned}
& \|\partial \xi_y^n\|^2 + (a^{-1}(y_h^n) \partial \xi_{\mathbf{p}}^n, \xi_{\mathbf{p}}^n) \\
&= - \left(\frac{(a^{-1}(y^n) - a^{-1}(y_h^n)) \mathbf{P}^n - (a^{-1}(y^{n-1}) - a^{-1}(y_h^{n-1})) \mathbf{P}^{n-1}}{\Delta t}, \xi_{\mathbf{p}}^n \right) - \\
& \quad (\partial \eta_y^n, \partial \xi_y^n) - \left(\frac{a^{-1}(y_h^n) - a^{-1}(y_h^{n-1})}{\Delta t} \xi_{\mathbf{p}}^{n-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n \right) + \\
& \quad (f(y^n) - f(y_h^n), \partial \xi_y^n) + (\partial y^n - y_t^n, \partial \xi_y^n). \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Поскольку $y_h^0 = Y^0$, взяв $n = 0$ и $\mathbf{v}_h = \xi_{\mathbf{p}}^0$ в (3.27), мы получим

$$(a^{-1}(y_h^0) \xi_{\mathbf{p}}^0, \xi_{\mathbf{p}}^0) = - ((a^{-1}(y^0) - a^{-1}(y_h^0)) \mathbf{P}^0, \xi_{\mathbf{p}}^0). \tag{3.41}$$

Используем неравенство Коши, предположение относительно a , (3.35) и (3.4). Мы видим, что

$$\|\xi_{\mathbf{p}}^0\| \leq C \|(a^{-1})'(\tilde{y})(y^0 - Y^0) \mathbf{P}^0\| \leq C \|a^{-1}\|_{1,\infty} \|\mathbf{P}^0\|_{0,\infty} \|y^0 - Y^0\| \leq Ch^2 (\|y_0\|_2 + \|\mathbf{p}^0\|_1). \tag{3.42}$$

Умножив Δt и суммируя по n от 1 до l ($1 \leq l \leq N$) в обеих частях (3.40), используя неравенство

$$\begin{aligned}
(a^{-1}(y_h^n) \partial \xi_{\mathbf{p}}^n, \xi_{\mathbf{p}}^n) &= \frac{1}{\Delta t} (a^{-1}(y_h^n) \xi_{\mathbf{p}}^n - a^{-1}(y_h^n) \xi_{\mathbf{p}}^{n-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) \\
&\geq \frac{1}{\Delta t} (a^{-1}(y_h^n) \xi_{\mathbf{p}}^n, \xi_{\mathbf{p}}^n) - \frac{1}{2\Delta t} (\|a^{-\frac{1}{2}}(y_h^n) \xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 + \|a^{-\frac{1}{2}}(y_h^n) \xi_{\mathbf{p}}^{n-1}\|^2) \\
&= \frac{1}{2\Delta t} (\|a^{-\frac{1}{2}}(y_h^n) \xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 - \|a^{-\frac{1}{2}}(y_h^{n-1}) \xi_{\mathbf{p}}^{n-1}\|^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{a^{-1}(y_h^{n-1}) - a^{-1}(y_h^n)}{\Delta t} \xi_{\mathbf{p}}^{n-1}, \xi_{\mathbf{p}}^{n-1} \right), \tag{3.43}
\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^l \|\partial \xi_y^n\|^2 \Delta t + \frac{1}{2} \|a^{-\frac{1}{2}}(y_h^l) \xi_{\mathbf{p}}^l\|^2 \leq \frac{1}{2} \|a^{-\frac{1}{2}}(y_h^0) \xi_{\mathbf{p}}^0\|^2 + \\
& \sum_{n=1}^l \Delta t (f(y^n) - f(y_h^n), \partial \xi_y^n) + \sum_{n=1}^l \Delta t (\partial y^n - y_t^n, \partial \xi_y^n) - \sum_{n=1}^l \Delta t (\partial \eta_y^n, \partial \xi_y^n) - \\
& \sum_{n=1}^l \Delta t \left(\frac{a^{-1}(y_h^n) - a^{-1}(y_h^{n-1})}{\Delta t} \xi_{\mathbf{p}}^{n-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^l \Delta t \left(\frac{a^{-1}(y_h^n) - a^{-1}(y_h^{n-1})}{\Delta t} \xi_{\mathbf{p}}^{n-1}, \xi_{\mathbf{p}}^{n-1} \right) - \\
& \sum_{n=1}^l \Delta t \left(\frac{(a^{-1}(y^n) - a^{-1}(y_h^n)) \mathbf{P}^n - (a^{-1}(y^{n-1}) - a^{-1}(y_h^{n-1})) \mathbf{P}^{n-1}}{\Delta t}, \xi_{\mathbf{p}}^n \right) =: \sum_{i=1}^7 Q_i. \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Аналогично (3.32)–(3.34) оценим Q_2 , Q_3 , Q_4 следующим образом:

$$Q_2 \leq C \sum_{n=1}^l (\|\xi_y^n\|^2 + \|\eta_y^n\|^2) \Delta t + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^l \|\partial \xi_y^n\|^2 \Delta t, \tag{3.45}$$

$$Q_3 \leq C(\Delta t)^2 \|y_{tt}\|_{L^2(L^2)}^2 + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^l \|\partial \xi_y^n\|^2 \Delta t, \tag{3.46}$$

$$Q_4 \leq C \sum_{n=1}^l \|\partial \eta_y^n\|^2 \Delta t + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^l \|\partial \xi_y^n\|^2 \Delta t. \tag{3.47}$$

Заметим, что

$$a^{-1}(y_h^n) - a^{-1}(y_h^{n-1}) = (a^{-1})'(y_h^{n*})(y_h^n - y_h^{n-1}), \quad (3.48)$$

где y_h^{n*} расположено между y_h^n и y_h^{n-1} .

Для Q_5 из (3.48) и неравенства Коши следует, что

$$\begin{aligned} Q_5 &= - \sum_{n=1}^l \Delta t ((a^{-1})'(y_h^{n*}) \partial y_h^n \xi_{\mathbf{p}}^{n-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) = \sum_{n=1}^l \Delta t ((a^{-1})'(y_h^{n*}) \partial \xi_y^n \xi_{\mathbf{p}}^{n-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) + \\ &\quad \sum_{n=1}^l \Delta t ((a^{-1})'(y_h^{n*}) \partial \eta_y^n \xi_{\mathbf{p}}^{n-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) - \sum_{n=1}^l \Delta t ((a^{-1})'(y_h^{n*}) \partial y_h^n \xi_{\mathbf{p}}^{n-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n) \\ &\leq C \sum_{n=1}^l \Delta t \|a^{-1}\|_{1,\infty} (\|\partial \xi_y^n\| + \|\partial \eta_y^n\|) \|\xi_{\mathbf{p}}^{n-1}\|_{0,\infty} \|\xi_{\mathbf{p}}^n\| + \\ &\quad C \sum_{n=1}^l \Delta t \|a^{-1}\|_{1,\infty} \|\partial y_h^n\|_{0,\infty} \|\xi_{\mathbf{p}}^{n-1}\| \cdot \|\xi_{\mathbf{p}}^n\| \\ &\leq C \sum_{n=1}^l \Delta t \|a^{-1}\|_{1,\infty} (\|\partial \xi_y^n\| + \|\partial \eta_y^n\|) (\|P^n\|_{0,\infty} + \|p_h^n\|_{0,\infty}) \|\xi_{\mathbf{p}}^n\| + \\ &\quad C \sum_{n=1}^l \Delta t \|a^{-1}\|_{1,\infty} \|y_t\|_{L^\infty(L^\infty)} \|\xi_{\mathbf{p}}^{n-1}\| \cdot \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Используя (3.49), неравенство Юнга, (2.4), (2.7), (3.13), (3.14), (3.35), (3.37) и (3.42), заключаем, что

$$\begin{aligned} Q_5 &\leq C \sum_{n=0}^l (\|P^n\|_{0,\infty}^2 + \|p_h^n\|_{0,\infty}^2 + \|y_t\|_{L^\infty(L^\infty)}) \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 \Delta t \leq C \sum_{n=1}^l \|\partial \eta_y^n\|^2 \Delta t + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^l \|\partial \xi_y^n\|^2 \Delta t \\ &\leq \frac{1}{8} \sum_{n=1}^l \|\partial \xi_y^n\|^2 \Delta t + C(\Delta t + h^2)^2. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Аналогичным образом для Q_6 имеем:

$$Q_6 \leq \frac{1}{8} \sum_{n=1}^l \|\partial \xi_y^n\|^2 \Delta t + C(\Delta t + h^2)^2. \quad (3.51)$$

Наконец, для Q_7 мы видим, что:

$$\begin{aligned} Q_7 &= - \sum_{n=1}^l \Delta t \left((a^{-1}(y_h^n) - a^{-1}(y_h^{n-1})) \partial P^n, \xi_{\mathbf{p}}^n \right) - \\ &\quad \sum_{n=1}^l \Delta t \left(\frac{[(a^{-1})'(y_h^{n*})(y_h^n - y_h^{n-1}) - (a^{-1})'(y_h^{n*})(y_h^n - y_h^{n-1})] P^{n-1}}{\Delta t}, \xi_{\mathbf{p}}^n \right) - \\ &\quad \sum_{n=1}^l \Delta t \left((a^{-1})'(y_h^{n*}) (\partial \eta_y^n + \partial \xi_y^n) P^{n-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n \right) =: \sum_{i=1}^3 J_i, \end{aligned} \quad (3.52)$$

где мы использовали (3.48) и (3.20).

Теперь оценим J_1 , J_2 , J_3 соответственно. Для J_1 , используя предположение относительно a , (3.26), неравенство Коши и неравенство Юнга, мы имеем:

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq C \sum_{n=1}^l \Delta t \|a^{-1}\|_{1,\infty} \|y^n - y_h^n\| \cdot \|\partial P^n\|_{0,\infty} \|\xi_{\mathbf{p}}^n\| \\
&\leq C \sum_{n=1}^l \|y^n - y_h^n\|^2 \Delta t + C \sum_{n=1}^l \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 \Delta t \leq C(\Delta t + h^2)^2 + C \sum_{n=1}^l \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 \Delta t,
\end{aligned} \quad (3.53)$$

где

$$\begin{aligned}
\|\partial P^n\|_{0,\infty} &\leq \|\partial(\Pi_h \mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n)\|_{0,\infty} + \|\partial(\Pi_h \mathbf{p}^n)\|_{0,\infty} \\
&\leq Ch^{-1} \|\partial(\Pi_h \mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n)\| + C \|\partial \mathbf{p}^n\|_{0,\infty} \\
&\leq Ch^{-1} (\|\partial(\Pi_h \mathbf{p}^n - \mathbf{p}^n)\| + \|\partial(\mathbf{p}^n - \mathbf{P}^n)\|) + C \|\mathbf{p}_t\|_{L^\infty(L^\infty)} \\
&\leq C (\|\mathbf{p}_t\|_{L^\infty(H^1)} + \|\mathbf{p}_t\|_{L^\infty(L^\infty)} + \|\mathbf{p}\|_{L^\infty(H^1)} + \|y\|_{L^\infty(H^2)} + \|y_t\|_{L^\infty(H^2)}) \leq C,
\end{aligned}$$

где мы использовали неравенство треугольника, обратное неравенство, (2.4), (2.6), (2.7), (3.3) и (3.19).

Для J_2 имеем:

$$\begin{aligned}
J_2 &= - \sum_{n=1}^l \Delta t \left((a^{-1})''(\tilde{y}^{n*})(y^{n*} - y_h^{n*}) \partial y^n \mathbf{P}^{n-1}, \xi_{\mathbf{p}}^n \right) \\
&\leq C \sum_{n=1}^l \Delta t (\Delta t + \|y^n - y_h^n\| + \|y^{n-1} - y_h^{n-1}\|) \|\xi_{\mathbf{p}}^n\| \\
&\leq C(\Delta t + h^2)^2 + C \sum_{n=1}^l \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 \Delta t,
\end{aligned} \quad (3.54)$$

где мы использовали предположение относительно a , неравенство Коши, неравенство Юнга, (3.35), (3.26),

$$(a^{-1})'(y^{n*}) - (a^{-1})'(y_h^{n*}) = (a^{-1})''(\tilde{y}^{n*})(y^{n*} - y_h^{n*})$$

и

$$\begin{aligned}
|y^{n*} - y_h^{n*}| &= |y^{n*} - y^n + y^n - y_h^n + y_h^n - y_h^{n*}| \\
&\leq |y^{n-1} - y^n| + |y^n - y_h^n| + |y_h^n - y^n| + |y^n - y^{n-1}| + |y^{n-1} - y_h^{n-1}| \\
&= 2|y^{n-1} - y^n| + 2|y^n - y_h^n| + |y^{n-1} - y_h^{n-1}|.
\end{aligned}$$

Для J_3 из неравенства Коши, неравенства Юнга, предположения относительно a , (3.14) и (3.35) следует, что:

$$\begin{aligned}
J_3 &\leq C \sum_{n=1}^l \Delta t \|a^{-1}\|_{1,\infty} (\|\partial \eta_y^n\| + \|\partial \xi_y^n\|) \|\mathbf{P}^{n-1}\|_{0,\infty} \|\xi_{\mathbf{p}}^n\| \\
&\leq C \sum_{n=1}^l \|\partial \eta_y^n\|^2 \Delta t + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^l \|\partial \xi_y^n\|^2 \Delta t + C \sum_{n=1}^l \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 \Delta t \\
&\leq C(\Delta t + h^2)^2 + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^l \|\partial \xi_y^n\|^2 \Delta t + C \sum_{n=1}^l \|\xi_{\mathbf{p}}^n\|^2 \Delta t.
\end{aligned} \quad (3.55)$$

Таким образом, из (3.52)–(3.55) и (3.37) видно, что

$$Q_7 \leq C(\Delta t + h^2)^2 + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^l \|\partial \xi_y^n\|^2 \Delta t. \quad (3.56)$$

Взяв $\mathbf{v}_h = \nabla \xi_y^n$ в (3.27), легко получим

$$\|\nabla \xi_y^n\| \leq C\|\xi_{\mathbf{p}}^n\| + C\|y^n - y_h^n\|. \quad (3.57)$$

Теперь, объединив (2.4), (2.7), (3.14), (3.44)–(3.47), (3.50), (3.51), (3.56), (3.57), неравенство Пуанкаре с неравенством треугольника, завершим доказательство теоремы. $\square$

Замечание. Мы использовали ограничение $\|\mathbf{p}_h^n\|_{0,\infty} \leq C$ без доказательства в (3.50). Обычно это доказывается анализом устойчивости. Аналогичные приложения можно найти в [4, 8].

4. Численные эксперименты

Представим один численный пример для проверки априорных оценок ошибки, полученных в пункте 3 численно. В следующем примере мы используем область $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ и $T = 1$.

Пример. Пусть $a(y) = e^y$. Выберем $g(x, t)$ таким образом, что точное решение имеет следующий вид:

$$y(x, t) = \sin(\pi t) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2).$$

Тогда $f(y) = y^3 + g(x, t)$ и явная формулировка $g(x, t)$ такая:

$$\begin{aligned} g(x, t) = & \pi \cos(\pi t) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) - \\ & \pi^2 \sin(\pi t) e^{\sin(\pi t) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)} (\sin(\pi t) (\cos^2(\pi x_1) \sin^2(\pi x_2) + \\ & \sin^2(\pi x_1) \cos^2(\pi x_2)) - 2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)) - (\sin(\pi t) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2))^3. \end{aligned}$$

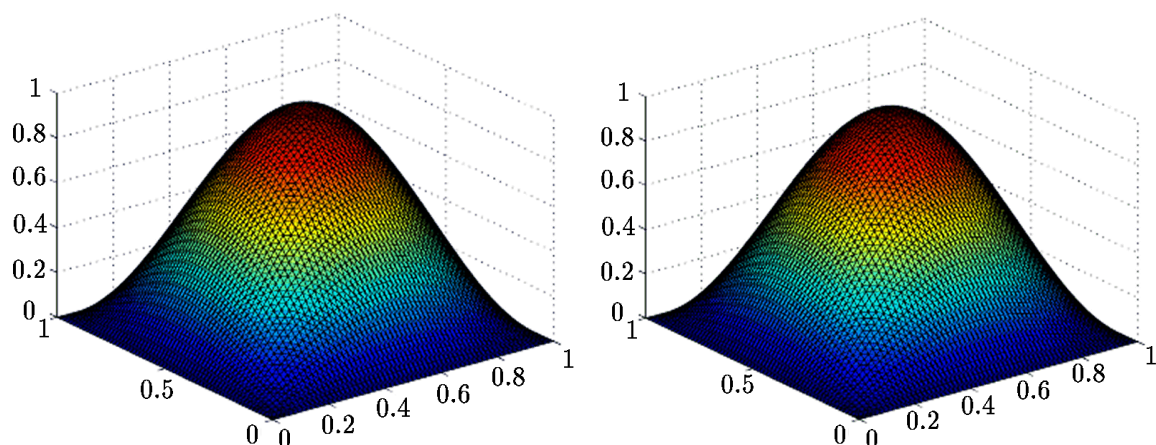
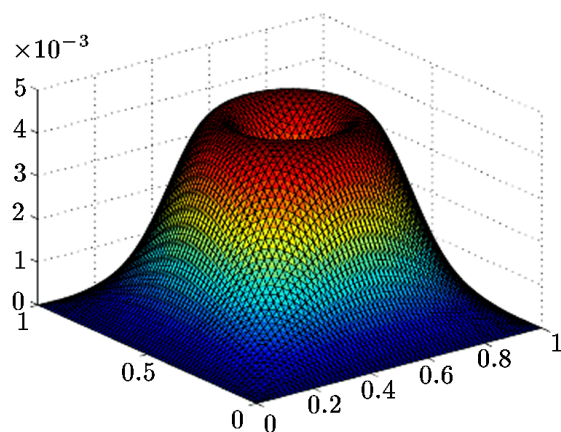
В таблице 1 сначала пусть $\Delta t = h^2$; покажем ошибки $\|y^{N/2} - y_h^{N/2}\|$. Затем возьмем $\Delta t = h$ и представим ошибки $\|\nabla(y^{N/2} - y_h^{N/2})\|$ и $\|\mathbf{p}^{N/2} - \mathbf{p}_h^{N/2}\|$ в табл. 2. Табл. 1 и 2 также показывают порядок сходимости этих ошибок. Теоретические результаты представлены в табл. 1 и 2. Наконец, на рисунке 1 показаны профили точного решения y и численного решения на 64×64 сетке при $t = 0.5$. Кроме того, профиль ошибки $|y^{N/2} - y_h^{N/2}|$ показан во всех вершинах 64×64 треугольной сетки на рис. 2.

Таблица 1. Ошибки и порядки сходимости $\|y^{N/2} - y_h^{N/2}\|$ при $\Delta t = h^2$

h	Δt	$\ y^{N/2} - y_h^{N/2}\ $	Rate
1/4	1/16	6.8756e-2	—
1/6	1/36	3.2673e-2	1.83
1/8	1/64	1.9060e-2	1.87
1/10	1/100	1.2382e-2	1.93
1/12	1/144	8.6341e-3	1.98
1/14	1/196	6.3379e-3	2.01
1/16	1/256	4.8383e-3	2.02

Таблица 2. Ошибки и порядки сходимости $\|\nabla(y^{N/2} - y_h^{N/2})\|$ и $\|p^{N/2} - p_h^{N/2}\|$ при $\Delta t = h$

$h = \Delta t$	$\ \nabla(y^{N/2} - y_h^{N/2})\ $	Rate	$\ p^{N/2} - p_h^{N/2}\ $	Rate
1/8	4.3348e-1	—	6.8311e-1	—
1/16	2.1969e-1	0.98	3.4581e-1	0.98
1/32	1.1116e-1	0.98	1.7350e-1	1.00
1/64	5.6137e-2	0.99	8.6859e-2	1.00

**Рис. 1.** Профили точного решения y (слева) и численного решения (справа) на 64×64 треугольной сетке при $t = 0.5$ ($\Delta t = 1/64$)**Рис. 2.** Профиль ошибки $|y^{N/2} - y_h^{N/2}|$ во всех вершинах на 64×64 треугольной сетке ($\Delta t = 1/64$)

5. Выводы

В данной статье получены оптимальные априорные оценки ошибки $P_0^2 - P_1$ смешанного метода конечных элементов для нелинейного параболического уравнения. Представляется, что теоретические и численные результаты для этого класса задач являются новыми в литературе. В нашей следующей работе мы рассмотрим апостериорные оценки ошибки и построим адаптивные смешанные конечно-элементные алгоритмы. Кроме того, мы обсудим двухсеточный алгоритм для задачи (1.1)–(1.3).

Литература

1. **Brezzi F.** On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers // R.A.I.R.O. Anal. Numer. — 1974. — Vol. 8. — P. 129–151.
2. **Brezzi F. and Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New York: Springer-Verlag, 1991.
3. **Boffi D., Brezzi F. and Fortin M.** Mixed Finite Element Methods and Applications. — Heidelberg: Springer, 2013.
4. **Chen L. and Chen Y.** Two-grid method for nonlinear reaction-diffusion equations by mixed finite element methods // J. Sci. Comput. — 2011. — Vol. 49, № 3. — P. 383–401.
5. **Cannon J.R. and Lin Y.P.** A priori L^2 error estimates for finite-element methods for nonlinear diffusion equations with memory // SIAM J. Numer. Anal. — 1990. — Vol. 27, № 3. — P. 595–607.
6. **Chen S.C. and Chen H.R.** New mixed element schemes for a second-order elliptic problem // Math. Numer. Sin. — 2010. — Vol. 32, № 2. — P. 213–218.
7. **Ciarlet P.G.** The Finite Element Method for Elliptic Problems. — Amsterdam: North Holland, 1978.
8. **Dawson C.N., Wheeler M.F. and Woodward C.S.** A two-grid finite difference scheme for nonlinear parabolic equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1998. — Vol. 35. — P. 435–452.
9. **Eriksson K. and Johnson C.** Adaptive finite element methods for parabolic problems IV: nonlinear problems // SIAM J. Numer. Anal. — 1995. — Vol. 32, № 6. — P. 1729–1749.
10. **Grisvard P.** Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. — Boston–London–Melbourne: Pitman, 1985.
11. **Garcia S.M.F.** Improved error estimates for mixed finite-element approximations for nonlinear parabolic equations: the continuous-time case // Numer. Methods Partial Differ. Eq. — 1994. — Vol. 10, № 2. — P. 129–147.
12. **Garcia S.M.F.** Improved error estimates for mixed finite-element approximations for nonlinear parabolic equations: the discrete-time case // Numer. Methods Partial Differ. Eq. — 1994. — Vol. 10, № 2. — P. 149–169.
13. **Hou T., Jiang W., Yang Y. and Leng H.** Two-grid P_0^2 – P_1 mixed finite element methods combined with Crank-Nicolson scheme for a class of nonlinear parabolic equations // Appl. Numer. Math. — 2019. — Vol. 137. — P. 136–150.
14. **Nie Y. and Thomée V.** A lumped mass finite-element method with quadrature for a non-linear parabolic problem // IMA J. Numer. Anal. — 1985. — Vol. 5, № 4 — P. 371–396.
15. **Pani A.K. and Fairweather G.** H^1 -Galerkin mixed finite element methods for parabolic partial integro-differential equations // IMA J. Numer. Anal. — 2002. — Vol. 22. — P. 231–252.
16. **Pehlivanov A.I., Carey G.F. and Vassilevski P.S.** Least-squares mixed finite element methods for non-selfadjoint elliptic problems: I. Error estimates // Numer. Math. — 1996. — Vol. 72, № 4. — P. 501–522.
17. **Quarteroni A. and Valli A.** Numerical Approximation of Partial Differential Equations. — Springer, 1997.
18. **Russell T.F.** Time stepping along characteristics with incomplete iteration for a Galerkin approximation of miscible displacement in porous media // SIAM J. Numer. Anal. — 1985. — Vol. 22, № 5. — P. 970–1013.
19. **Shi D., Yan F. and Wang J.** Unconditional superconvergence analysis of a new mixed finite element method for nonlinear Sobolev equation // Appl. Math. Comput. — 2016. — Vol. 274, № 1. — P. 182–194.

20. **Shi D., Yan F. and Wang J.** Unconditionally superclose analysis of a new mixed finite element method for nonlinear parabolic equation // J. Comput. Math. — 2019. — Vol. 37, № 1. — P. 1–17.
21. **Shi D. and Yang H.** Unconditionally optimal error estimates of a new mixed FEM for nonlinear Schrödinger equations // Adv. Comput. Math. — 2019. — Vol. 45. — P. 3173–3194.
22. **Shi F., Yu J.P. and Li K.T.** A new stabilized mixed finite-element method for Poisson equation based on two local Gauss integrations for linear element pair // Int. J. Comput. Math. — 2011. — Vol. 88. — P. 2293–2305.
23. **Thomée V.** Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. — Berlin: Springer-Verlag, 1984.
24. **Wu L. and Allen M.B.** A two-grid method for mixed finite-element solution of reaction-diffusion equations // Numer. Methods Partial Differ. Eq. — 1999. — Vol. 15. — P. 317–332.
25. **Weng Z., Feng X. and Huang P.** A new mixed finite element method based on the Crank–Nicolson scheme for the parabolic problems // Appl. Math. Model. — 2012. — Vol. 36. — P. 5068–5079.

Поступила в редакцию 30 июня 2020 г.

После исправления 18 сентября 2020 г.

Принята к печати 14 июля 2021 г.