

**ОБ ЭФФЕКТАХ ТРЕТЬЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ  
ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН  
В ИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ.  
ГЕНЕРАЦИЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК**

*Б. А. Конюхов, Г. М. Шалашов*

(Горький)

В приближении девятиконстантной теории упругости рассматриваются нелинейные взаимодействия продольных и сдвиговых волн в изотропной твердой среде. Получены выражения, описывающие генерацию второй и третьей гармоник упругих волн в приближении недиспергирующей среды и при наличии квазистатических упругих полей.

1. Теория нелинейных взаимодействий упругих волн в твердых телах ограничивается в основном приближением нелинейной пятиконстантной теории упругости [1]. Как показывают эксперименты [1-4], при распространении упругих волн в изотропной среде имеют место эффекты, связанные с кубической нелинейностью твердой среды, такие как генерация второй сдвиговой гармоники, при наличии статических напряжений, третьей продольной и сдвиговой гармоник и т. д. Полного теоретического исследования этих эффектов для упругих волн не проводилось.

В данной работе в рамках девятиконстантной нелинейной теории упругости на базе асимптотических методов [5] проводится рассмотрение взаимодействия немодулированных упругих волн.

Для рассмотрения указанных вопросов проведем в третьем приближении решение уравнений движения, которые в лагранжевых координатах имеют вид [1]

$$(1.1) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial (\partial u_i / \partial x_j)} \right]$$

где  $\rho_0$  — плотность невозмущенной среды,  $u_i$  — компоненты вектора смещений,  $t$  — время,  $x_j$  — координаты,  $\mathcal{E}$  — внутренняя энергия единицы объема. Для получения уравнений движения с учетом кубической упругой нелинейности представим  $\mathcal{E}$  в виде

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{E} = & \mu u_{ik}^2 + (K/2 - \mu/3) u_{ll}^2 + 1/3 A u_{il} u_{ik} u_{lk} + \\ & + B u_{ik}^2 u_{ll} + 1/3 C u_{ll}^3 + D u_{ll}^4 + G u_{ik} u_{il} u_{kl} u_{jj} + \\ & + H u_{ik}^2 u_{ll}^2 + J u_{ik}^4 \\ u_{ik} = & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \end{aligned}$$

где  $u_{ik}$  — тензор деформаций,  $\mu, K$  — упругие константы второго порядка,  $A, B, C$  — упругие константы третьего порядка,  $D, G, H, J$  — упругие константы четвертого порядка. Константы упругости четвертого порядка можно также ввести иначе — через разложение  $\mathcal{E}$  по инвариантам тензора деформаций [6]

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_4 = & n_1 I_1^4 + n_2 I_1^2 I_2 + n_3 I_1 I_3 + n_4 I_2^2 \\ I_1 = & u_{ll}, \quad I_2 = 1/2 (u_{ll}^2 - u_{ik}^2), \quad I_3 = \det (u_{ik}) \end{aligned}$$

где  $\mathcal{E}_4$  — часть  $\bar{\mathcal{E}}$ , содержащая члены четвертой степени по деформациям. Связь между константами четвертого порядка в (1.2) и (1.3) осуществляется соотношениями

$$(1.4) \quad D = n_1 + n_2 / 2 + n_3 / 6 + n_4 / 4, \quad H = -1/2 (n_2 + n_3 + n_4) \\ G = n_3 / 3, \quad J = n_4 / 4$$

После подстановки (1.2) в (1.4) можно получить уравнения движения, описывающие нелинейные взаимодействия упругих волн с учетом кубической нелинейности твердой среды]

$$(1.5) \quad \rho_0 \partial^2 u_i / \partial t^2 - \mu \partial^2 u_i / \partial x_k^2 - (K + \mu / 3) \partial^2 u_l / \partial x_l \partial x_i = f_i' + f_i''$$

где  $f_i'$  определяется квадратической нелинейностью твердой среды

$$f_i' = \left( \mu + \frac{A}{4} \right) \left( \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2} + 2 \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_k} \right) + \left( K + \frac{\mu}{3} + \frac{A}{4} + B \right) \times \\ \times \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k} \right) + \left( K - \frac{2\mu}{3} + B \right) \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \left( \frac{A}{4} + B \right) \times \\ \times \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_k} \right) + (B + 2C) \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i}$$

$f_i''$  определяется кубической упругой нелинейностью твердой среды

$$j_i'' = (12D + H) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right)^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + \left( J + B + \frac{K}{2} - \frac{\mu}{3} \right) \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right)^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \left( J + \frac{B}{2} \right) \times \\ \times \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l^2} + (J + H) \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + \left( J + H + C + \frac{B}{2} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right)^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} + \\ + \left( 2J + 2B + \frac{A}{2} + K + \frac{\mu}{3} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_m \partial x_k} + \left( 2J + B + \frac{A}{4} \right) \times \\ \times \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_m \partial x_k} \right) + 2J \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_m \partial x_k} + \left( \frac{3G}{4} + B \right) \times \\ \times \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2} + 2 \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_k} + \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2} \right) + \left( \frac{3G}{4} + \frac{A}{4} \right) \times \\ \times \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_m \partial x_k} \right) + \frac{3G}{4} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_m \partial x_k} + \right. \\ \left. + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_i} \right) + \left( \frac{3G}{4} + B + \frac{A}{4} \right) \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_i} + \right. \\ \left. + \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_i} \right) + \left( \frac{3G}{4} + 2H \right) \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_i} + \right. \\ \left. + \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_l} \right) + \left( \frac{3G}{4} + 2H + 2C + B \right) \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_l} + \right. \\ \left. + \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_i} \right) + (C + H) \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \left( \frac{A}{2} + \mu \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_k} \right) + \frac{A}{4} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k^2} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} + \right. \\ \left. + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_m^2} \right) + \frac{A}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_m} \right) + \\ + B \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_m \partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_m \partial x_k} \right)$$

Вклад членов четвертого порядка по степеням  $\partial u_i / \partial x_k$  в (1.1) в рассматриваемые ниже четырехчастотные взаимодействия плоских упругих волн меньше вклада членов третьего порядка в  $(\mu^*)^{-1}$  раз, где  $\mu^* = U / \lambda$  — число Маха. Реально достижимые экспериментально значения  $\mu^* = 10^{-5} \div 10^{-6}$ , поэтому члены четвертого и более высокого порядка по степеням  $\partial u_i / \partial x_k$  в (1.5) не учитываются.

Уравнение (1.5) — общее уравнение движения для твердой недиссипативной среды в кубическом приближении. При анализе его решений ограничимся плоскими упругими волнами, для которых (1.5) распадается на три уравнения. Пусть плоские продольные и сдвиговые волны распространяются вдоль  $x_1 \equiv x$ . В этом случае для продольной волны можно получить уравнение вида

$$(1.6) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \rho_0 c_l^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \beta \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \gamma \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + \\ + \tau_1 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + \tau_3 \left[ \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

$\rho_0 c_l^2 = K + 4/3\mu$ ,  $\beta = 3K + 4\mu + 2A + 6B + 2C$ ,  $\gamma = \mu + 1/2A + B$   
 $\tau_1 = 3/2K + 2\mu + 18B + 6A + 6C + 12(D + G + H + J)$   
 $\tau_2 = K + 4/3\mu + 7/2B + 5/2A + 2C + 4J + 3G + 2H$ ,  $\tau_3 = 1/2K + 2/3\mu + 7/2B + C + 5/4A + 2J + 3/2G + H$

Для сдвиговой волны, поляризованной по оси  $y$ , имеем

$$(1.7) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \rho_0 c_t^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \gamma \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right) + \\ + \tau_3 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \tau_4 \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + 2\tau_4 \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \\ + \tau_2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \tau_5 \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$$

$\rho_0 c_t^2 = \mu$ ,  $\tau_4 = 1/2K + 2/3\mu + B + 1/2A + J$ ,  
 $\tau_5 = 3/2K + 2\mu + 3B + 3/2A + 3J$

где  $\gamma$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  те же, что и в (1.6).

Для сдвиговых волн, поляризованных по  $z$ , уравнение будет аналогично (1.7). Для учета диссипативных свойств твердой среды необходимо в левые части уравнений (1.6) и (1.7) ввести члены вида

$$- (4/3\eta + \xi) \frac{\partial^3 u_x}{\partial t \partial x^2} \text{ и } - \eta \frac{\partial^3 u_y}{\partial t \partial x^2}$$

соответственно, где  $\eta$  — коэффициент сдвиговой вязкости,  $\xi$  — объемной.

Согласно общей теории нелинейных одномерных волн [5] среды с кубической нелинейностью характеризуются возможностью четырехчастотных взаимодействий, т. е. допускают генерацию третьей гармоники. При наличии статистических сторонних полей в такой среде возможны также и трехчастотные взаимодействия, т. е. генерация второй гармоники.

2. Рассмотрим генерацию высших гармоник продольной и сдвиговой упругих волн. Решение уравнений (1.6), (1.7) будем искать в виде

$$(2.1) \quad U = \sum_{n=1}^3 \text{Re} [A_n(\mu^* x, \mu^* t) e^{in(\omega t - kx)}]$$

где  $n\omega$ ,  $nk$ ,  $A_n$  — частота, волновой вектор и комплексная амплитуда  $n$ -й гармоники.

Используя стандартную процедуру усреднения [5], получим следующие укороченные уравнения для случая продольной упругой волны

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} + c_l \frac{\partial A_1}{\partial x} &= -\alpha_1 c_l A_1 - \frac{k^2 \beta}{\rho_0 c_l} (\bar{A}_1 A_2 + 3\bar{A}_2 A_3) + \\ &+ \frac{i\tau_1 k^3}{2\rho_0 c_l} (12A_2^2 \bar{A}_3 - 3\bar{A}_1^2 A_3) + \frac{i\tau_1 k^3}{2\rho_0 c_l} (A_1 \bar{A}_1 + 8A_2 \bar{A}_2 + 18A_3 \bar{A}_3) A_1 \\ \frac{\partial A_2}{\partial t} + c_l \frac{\partial A_2}{\partial x} &= -\alpha_2 c_l A_2 + \frac{k^2 \beta}{4\rho_0 c_l} (A_1^2 - 6\bar{A}_1 A_3) + \\ &+ \frac{6i\tau_1 k^3}{\rho_0 c_l} A_1 \bar{A}_2 A_3 + \frac{i\tau_1 k^3}{\rho_0 c_l} (2A_1 \bar{A}_1 + 4A_2 \bar{A}_2 + 18A_3 \bar{A}_3) A_2 \\ \frac{\partial A_3}{\partial t} + c_l \frac{\partial A_3}{\partial x} &= -\alpha_3 c_l A_3 + \frac{k^2 \beta A_1 A_2}{\rho_0 c_l} - \frac{i\tau_1 k^3}{6\rho_0 c_l} (A_1^2 - 12\bar{A}_1 A_2^2) + \\ &+ (6A_1 \bar{A}_1 + 24A_2 \bar{A}_2 + 27A_3 \bar{A}_3) A_3 \\ \alpha_1 &= (\frac{4}{3}\eta + \xi) \omega^2 / 2c_l^3, \quad \alpha_2 = 4\alpha_1, \quad \alpha_3 = 9\alpha_1 \end{aligned}$$

$\bar{A}_n$  комплексно сопряжено величине  $A_n$ .

Первые члены в правых частях уравнений (2.2) описывают поглощение упругой волны, вторые — взаимодействие гармоник на квадратичной нелинейности, третьи — взаимодействие гармоник на кубической нелинейности, четвертые — несинхронные взаимодействия гармоник на кубической нелинейности (нелинейную расстройку [5]).

Анализируя полученную систему укороченных уравнений (2.2), можно отметить, что процесс генерации третьей гармоники продольной волны связан как с квадратичной нелинейностью твердой среды (вторые члены в уравнениях (2.2)), так и с кубической (третьи члены). В рамках пятиконстантной теории упругости имеет место генерация нарастающей в пространстве второй гармоники продольной упругой волны [1,7]. Третья гармоника генерируется в результате двух последовательных трехчастотных взаимодействий на квадратичной нелинейности и одного четырехчастотного на кубической. Генерация гармоник имеет накапливающийся в пространстве характер.

В диссипативной недиспергирующей среде решение можно искать в приближении заданного поля первой гармоники [1,5], т. е. при условиях

$$(2.3) \quad \begin{aligned} A_1 &= A_{10}, \quad A_2 = A_3 = 0 \quad \text{при } x = 0 \\ A_1(x) &\gg A_2(x) \gg A_3(x) \quad \text{при } x > 0 \end{aligned}$$

Решение системы (2.2) при учете (2.3) имеет вид

$$(2.4) \quad \begin{aligned} A_1 &= A_{10} e^{-\alpha_1 x}, \quad A_2 = \frac{k^2 \beta A_{10}^2}{4\rho_0 c_l^2 (\alpha_2 - 2\alpha_1)} (e^{-2\alpha_1 x} - e^{-\alpha_2 x}) \equiv P(x) A_{10}^2 \\ A_3 &= \frac{k^4 \beta^2 A_{10}^3}{4\rho_0^2 c_l^4 (\alpha_2 - 2\alpha_1)} \left[ \frac{e^{-3\alpha_1 x}}{\alpha_3 - 3\alpha_1} - \frac{e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)x}}{\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1} + \frac{(\alpha_2 - 2\alpha_1) e^{-\alpha_3 x}}{(\alpha_3 - 3\alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1)} \right] - \\ &- \frac{i\tau_1 k^3 A_{10}^3}{6\rho_0 c_l^2 (\alpha_3 - 3\alpha_1)} (e^{-3\alpha_1 x} - e^{-\alpha_3 x}) \equiv [R_1(x) - iR_2(x)] A_{10}^3 \end{aligned}$$

Переходя к действительным амплитудам и фазам при помощи соотношений

$$(2.5) \quad A_{10} = a_{10} e^{i\varphi_{10}}, \quad A_2 = a_2 e^{i\varphi_2}, \quad A_3 = a_3 e^{i\varphi_3}$$

получим решение для амплитуды и фазы второй гармоники [7]

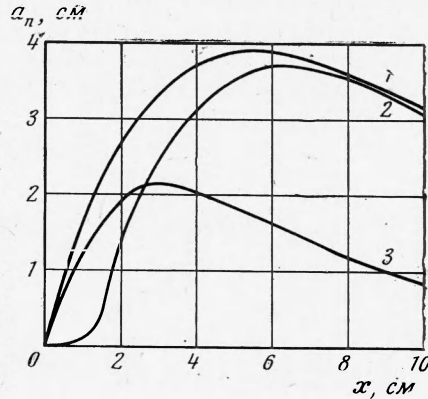
$$(2.6) \quad \varphi_2 - 2\varphi_{10} = 0, \quad a_2 = P(x) a_{10}^2$$

Третья гармоника на кубической нелинейности генерируется со сдвигом фазы  $\pi / 2$  относительно случая двух трехчастотных взаимодействий и для нее имеем следующие выражения для амплитуды и фазы соответственно:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} a_3 &= a_{10}^3 [R_1^2(x) + R_2^2(x)]^{1/2} \\ \varphi_3 &= 3\varphi_{10} - \arctg [R_2(x) / R_1(x)] \end{aligned}$$

Анализируя решение (2.6), можно отметить, что по мере роста  $x$  амплитуда второй и третьей гармоник будет возрастать, имея максимум на некотором расстоянии  $x = L$ . Это расстояние разное для второй и третьей гармоник. На фигуре графически изображены зависимости амплитуд второй гармоники  $10^8 a_2$  см (кривая 1), третьей гармоники, генерируемой на квадратичной нелинейности,  $10^9 a_{10}^3 R_1(x)$  см (кривая 2) и третьей гармоники, генерируемой на кубической нелинейности,  $10^{11} R_2(x) a_{10}^3$  см (кривая 3).

Здесь были выбраны средние реальные значения параметров материалов (металлов) ( $\beta/\rho_0 c_l^2 = 20$ ,  $\tau_1/\rho_0 c_l^2 = 500$ ,  $\alpha = 10^{-3} 2\pi / \lambda$ ). При  $\lambda = 10^{-1}$  см и  $c_l = 5 \cdot 10^5$  см/сек и амплитуде первой гармоники  $a_{10} = 10^{-6}$  см максимальное значение второй гармоники  $a_2(L) = 3.9 \cdot 10^{-8}$  см при  $L = 5.5$  см, аналогично для компонент  $a_{10}^3 R_1$  и  $R_2 a_{10}^3$  третьей гармоники имеем следующие максимальные значения  $a_{10}^3 R_1(L_1) = 3.7 \cdot 10^{-9}$  см при  $L_1 = 6.3$  см и  $a_{10}^3 R_2(L_2) = 2.15 \cdot 10^{-11}$  см при  $L_2 = 2.9$  см. Таким образом, вклад в генерацию третьей гармоники продольной волны кубической нелинейности среды мал по сравнению с последовательными трехчастотными взаимодействиями на квадратичной нелинейности.



Обращаясь к рассмотрению генерации третьей гармоники сдвиговых волн, заметим, что в отличие от продольных в рамках пятиконстантной теории упругости генерации второй гармоники сдвиговой волны нет [1,7]. Это означает, что генерация третьей сдвиговой гармоники будет происходить только за счет кубической упругой нелинейности. Укороченные уравнения для комплексных амплитуд сдвиговых волн, полученные после подстановки (2.1) в (1.7), имеют вид

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} + c_l \frac{\partial A_1}{\partial x} &= -\alpha_1 c_l A_1 - \frac{3ik^3 \tau_5 \bar{A}_1^2 A_3}{2\rho_0 c_l} + \frac{ik^3 \tau_5}{2\rho_0 c_l} (A_1 \bar{A}_1 + 18 A_3 \bar{A}_3) A_1 \\ \frac{\partial A_3}{\partial t} + c_l \frac{\partial A_3}{\partial x} &= -\alpha_3 c_l A_3 - \frac{ik^3 \tau_5 A_1^3}{6\rho_0 c_l} + \frac{ik^3 \tau_5}{2\rho_0 c_l} (6A_1 \bar{A}_1 + 27A_3 \bar{A}_3) A_3 \\ \alpha_1 &= \eta \omega^2 / 2c_l^3, \quad \alpha_3 = 9\alpha_1 \end{aligned}$$

В приближении заданного поля первой гармоники получим следующее решение системы уравнений (2.8):

$$(2.9) \quad \varphi_3 - 3\varphi_{10} + \frac{\pi}{2} = 0, \quad a_3 = \frac{\tau_5 k^3 a_{10}^3}{6\rho_0 c_l^2 (\alpha_3 - 3\alpha_1)} (e^{-3\alpha_1 x} - e^{-\alpha_3 x})$$

Графическая зависимость амплитуды третьей сдвиговой гармоники аналогична приведенной на фиг. 1 (кривая 3).

3. Наличие статических упругих полей в твердой среде приводит к генерации второй гармоники (трехчастотное взаимодействие), ампли-

туда которой линейно зависит от величины этого поля. Такое явление можно рассматривать как нерезонансные параметрические взаимодействия в среде с кубической нелинейностью.

Решение данной задачи целесообразно искать в виде [8]

$$(3.1) \quad u = \sum_{n=1}^2 \operatorname{Re} [A_n (\mu^* x, \mu^* t) e^{in(\omega t - kx)}] + u^m(x, y, z, t)$$

где  $A_n$  — комплексные амплитуды соответствующих гармоник,  $u^m(x, y, z, t)$  — внутреннее или внешнее (статическое или квазистатическое) упругое поле. Здесь предполагается, что пространственно-временные изменения являются медленными по сравнению с колебаниями в упругой волне. После подстановки решения (3.1) в (1.6) и (1.7) и усреднения по быстрым изменениям можно получить соответствующие укороченные уравнения для медленно меняющейся амплитуды второй гармоники продольной волны в приближении заданного поля первой гармоники и модулирующего поля в виде

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A_2}{\partial t} + c_l \frac{\partial A_2}{\partial x} &= \frac{ikA_2}{\rho_0 c_l} \left( \beta \frac{\partial u_x^m}{\partial x} + \gamma \frac{\partial u_y^m}{\partial y} + \gamma \frac{\partial u_z^m}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{k^2 A_1^2}{4\rho_0 c_l} \left( \beta + 2\tau_1 \frac{\partial u_x^m}{\partial x} + \tau_6 \frac{\partial u_y^m}{\partial y} + \tau_6 \frac{\partial u_z^m}{\partial z} \right) \\ \beta &= 4\mu + 3K + 2A + 6B + 2C, \quad \gamma = K - 2/3\mu + 2B + 2C \\ \tau_6 &= 24D + 12H + 6G + 6B + 6C \end{aligned}$$

Аналогично для поперечной волны, поляризованной по оси  $y$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial A_2}{\partial t} + c_t \frac{\partial A_2}{\partial x} &= \frac{ikA_2}{\rho_0 c_t} \left( \beta \frac{\partial u_x^m}{\partial x} + \beta \frac{\partial u_y^m}{\partial y} + \gamma \frac{\partial u_z^m}{\partial z} \right) + \\ &+ \frac{k^2 A_1^2}{4\rho_0 c_t} \left( 2\tau_5 \frac{\partial u_y^m}{\partial x} + \tau_7 \left( \frac{\partial u_x^m}{\partial y} \right) \right) \\ \beta &= K + 4/3\mu + A/2 + B, \quad \gamma = K - 2/3\mu + B \\ \tau_7 &= 6J + 3B + 3/2A \end{aligned}$$

В целях упрощения (в 3.2) и (3.3) диссипативные свойства среды не учитываются. Первые члены в правых частях описывают модуляцию звука низкочастотным полем на квадратичной нелинейности [8], вторые — генерацию второй гармоники в присутствии низкочастотного поля. Рассмотрим некоторые конкретные виды модулирующих полей.

Пусть  $u^m$  — поле однородного растяжения стержня силой  $P_0$ . Угол между  $P_0$  и направлением распространения волны  $\theta$ . Предполагая  $P_0$  лежащим в плоскости  $xy$  и учитывая соотношения [9]

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_x^m}{\partial x} &= \frac{P_0}{E} (\cos^2 \theta - \sigma \sin^2 \theta), \quad \frac{\partial u_y^m}{\partial y} = \frac{P_0}{E} (\sin^2 \theta - \sigma \cos^2 \theta) \\ \frac{\partial u_z^m}{\partial z} &= -\frac{P_0 \delta}{E}, \quad \frac{\partial u_x^m}{\partial y} = \frac{\partial u_y^m}{\partial x} = -\frac{P_0 (1 + \sigma)}{E} \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона, получаем для действительной амплитуды и фазы второй гармоники упругой волны, прошедшей путь  $x$

$$(3.5) \quad \varphi_2 = 2\varphi_{10} + m_2 x, \quad a_2 = m_1 a_{10}^2 x \sin m_2 x / m_2 x$$

где величины  $m_1$  и  $m_2$  определяются выражениями:  
для продольной волны

$$(3.6) \quad m_1 = \frac{k^2}{4\rho_0 c_t^2} \left\{ \beta + \frac{P_0}{E} [2(\tau_1 - \sigma\tau_6) \cos^2 \theta + (\tau_6 - \sigma\tau_6 - 2\sigma\tau_1) \sin^2 \theta] \right\}$$

$$m_2 = \frac{kP_0}{2\rho_0 c_t^2 E} [(\beta - 2\sigma\gamma) \cos^2 \theta + (\gamma - \sigma\gamma - \sigma\beta) \sin^2 \theta]$$

для поперечной волны

$$(3.7) \quad m_1 = - \frac{k^2 P_0 (1 + \sigma)}{4\rho_0 E c_t^2} (2\tau_5 + \tau_7) \sin \theta \cos \theta$$

$$m_2 = \frac{kP_0}{2\rho_0 E c_t^2} (\beta - \sigma\beta - \sigma\gamma)$$

Из (3.5) — (3.7) видно, что амплитуда второй гармоники линейно зависит от величины растягивающей силы  $P_0$  и имеет угловую зависимость, определяемую нелинейными свойствами среды.

Если  $u^m(x, y, z, t)$  является нелинейной функцией времени и координат, то возникает фазовая и амплитудная модуляция второй гармоники с частотой внешнего поля. Глубина модуляции определяется нелинейными упругими свойствами и величиной модулирующего поля, за фазовую модуляцию ответственна квадратичная нелинейность среды [8], за амплитудную — кубическая. В чистом виде амплитудную модуляцию за счет кубической нелинейности можно получить для генерации второй гармоники поперечной волны, задавая модулирующее поле в виде

$$(3.8) \quad u_x^m = - u_0^m \sin \theta \cos (\Omega t - \kappa x \cos \theta - \kappa y \sin \theta)$$

$$u_y^m = u_0^m \cos \theta \cos (\Omega t - \kappa x \cos \theta - \kappa y \sin \theta)$$

$$u_z^m = 0$$

Решением (3.3) будет

$$(3.9) \quad \varphi_2 = 2\varphi_{10}, \quad a_2 = 2B \cos (\Omega t - \psi)$$

$$\psi = \frac{1}{2}\kappa x (1 + \cos \theta) + \kappa y \sin \theta$$

$$B = (8\rho_0 c_t^2)^{-1} k^2 a_{10}^2 \kappa u_0^m (2\tau_5 \cos^2 \theta - \tau_7 \sin^2 \theta) x \sin [ \frac{1}{2}\kappa x \times$$

$$\times (1 - \cos \theta) ] [ \frac{1}{2}\kappa x (1 - \cos \theta) ]^{-1}$$

Полное колебание на удвоенной частоте можно представить в виде

$$(3.10) \quad U_2 = 2B \cos (\Omega t - \psi) \cos (2\omega t - 2kx + 2\varphi_{10}) = B \cos \times$$

$$\times [(2\omega + \Omega) t - 2kx + 2\varphi_{10} - \psi] +$$

$$+ B \cos [(2\omega - \Omega) t - 2kx + 2\varphi_{10} + \psi]$$

В отличие от продольной волны здесь отсутствует спектральная компонента с частотой  $2\omega$ . Такое явление можно рассматривать как своеобразное расщепление акустической волны в периодически неоднородной среде.

Таким образом, переход к девятиконстантной теории упругости, т. е. учет членов четвертого порядка по  $\partial u_i / \partial x_k$  в упругой энергии, позволяет оценить точность пятиконстантной теории упругости при рассмотрении эффектов третьего приближения в акустике. Например, вклад кубической нелинейности твердой среды в генерацию третьей гармоники при реально достижимых амплитудах упругих волн и длине пути взаимодействия (с учетом загугания) составляет несколько процентов. В третьем приближении рассмотрены качественно новые эффекты: генерация третьей

сдвиговой гармоникой и генерация второй гармоники в присутствии низкочастотных полей. В этих эффектах роль констант четвертого порядка определяющая. Последнее утверждение следует из результатов соответствующих экспериментов.

Так, например, величины констант для поликристаллического алюминия, оцененные по формулам (3.5), (3.6) и экспериментальным результатам [3], дают величину эффективного параметра квадратичной нелинейности  $\beta / \rho_0 c_l^2 \approx 15$ , а кубичной  $\tau_1 / \rho_0 c_l^2 \approx 1000$ . Кроме того, величины четырех независимых констант упругости четвертого порядка могут быть измерены методом, теория которого изложена в [10]. Константы упругости третьего порядка измеряются любым из методов, изложенных в [1, 8, 11, 12].

Рассмотренные явления можно использовать для измерения амплитуд и спектрального состава внутренних упругих напряжений в твердых телах в процессе динамических испытаний (статического напряжения, усталостного разрушения).

Авторы благодарны Л. И. Слепяну за указание недостатков при рецензировании работы.

Поступила 11 XI 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах. Усп. физ. н., 1970, т. 102, вып. 4, стр. 549.
2. Гедройц А. А., Зарембо Л. К., Красильников В. А. Сдвиговые волны конечной амплитуды в поли- и монокристаллах металлов. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, вып. 3, стр. 515—518.
3. Конюхов Б. А. О влиянии статического нагружения на нелинейные взаимодействия акустических волн в металлах. Акуст. ж., 1971, т. 17, № 1, стр. 157.
4. Зарембо Л. К., Шкловская-Корди В. В. О генерации гармоник при распространении ультразвуковых продольных и сдвиговых волн в твердых телах. Физика твердого тела, 1970, т. 12, вып. 12.
5. Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И. Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией. Изв. вузов, Радиофизика, 1970, т. 13, № 2.
6. Граньян А. А. Упругие постоянные высших порядков твердых тел. Физика твердого тела, 1964, т. 6, № 7.
7. Полякова А. А. Нелинейные эффекты в твердом теле. Физика твердого тела, 1964, т. 6, № 1, стр. 65.
8. Конюхов Б. А., Шалашов Г. М. О нерезонансных параметрических взаимодействиях поверхностных волн в изотропных твердых телах. ПМТФ, 1973, № 4, стр. 163.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 7. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
10. Конюхов Б. А., Шалашов Г. М. О несинхронных взаимодействиях упругих волн в твердых телах. 8-я Всес. акуст. конф. Рефераты докл., т. 2. М., 1973.
11. Гиц И. Д., Конюхов Б. А. Об оценке констант упругости третьего порядка изотропных твердых тел по модуляции звука звуком. Акуст. ж., 1973, т. 19, вып. 2, стр. 150.
12. Герстон Р. Распространение волн в жидкостях и твердых телах. Сб. «Физическая акустика», т. 1, ч. А. М., «Мир», 1966, стр. 13—138.