

УДК 532.5

Аналитическое решение для самоиндуцированного движения винтового вихря с гауссовым ядром*

В.Л. Окулов¹⁻³, Я. Фукумото⁴

¹Новосибирский государственный университет

²Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

³Датский технический университет, Люнгбю, Дания

⁴Институт промышленной математики, Университет Кюсю, Фукуока, Япония

E-mail: vokulov@mail.ru

Представлено аналитическое решение для винтовых вихрей с гауссовым распределением завихренности в ядре, которое подтверждено путем экспериментальных и численных моделирований. Данный результат получен путем распространения методики Дайсона для закона Био–Савара. Ранее аналитические решения были найдены и исследованы только для вихрей с постоянным распределением завихренности в ядре (вихревое ядро типа Рэнкина). Одним из важных является вопрос, поднятый в ходе дискуссии и касающийся различия между самоиндуцированными движениями винтообразных структур с обоими типами вихревого ядра. Предлагаемые решения имеют значение для фундаментального понимания и описания поведения потоков с винтовыми вихрями в различных областях промышленности и в природе. В качестве примеров можно привести концевые вихри за роторами ветро- или гидротурбин, торнадо или приосевые вихри в аэродинамических устройствах, таких как вихревые аппараты и генераторы; циклонные сепараторы, камеры сгорания и др.

Ключевые слова: вихревая динамика, винтовой вихрь, гауссово распределение завихренности, самоиндуцированное вращение.

Введение

Динамика винтовых вихрей имеет фундаментальное значение для многих энергетических приложений, так как они усиливают теплообмен, влияют на производительность роторных машин, и, наоборот, стационарное, неподвижное их положение обеспечивает стабильные операционные режимы в вихревых устройствах [1]. В последнее время моделирование винтовых вихрей получило новый импульс в связи с изучением вихревых взаимодействий в следах за турбинами, расположенных друг за другом в ветро- и гидроэлектростанциях [2, 3]. Для всех перечисленных приложений необходимо

* В настоящей работе В.Л. Окулов был поддержан контрактом с Минобрнауки РФ (№ 075-15-2019-1923) и Я. Фукумото грантами на научные исследования от Японского общества содействия развитию науки (№ S17119 и № 19K03672).

верно предсказывать винтообразную структуру, описывать ее движение и правильно моделировать винтовой вихрь. Регулярное экспериментальное изучение формы и внутренней структуры винтового вихря в конце прошлого века начали профессор Сергей Владимирович Алексеев и его ученик Сергей Иванович Шторк, опубликовав в статье [4] интересные данные, включающие описание структуры в виде гауссовой формы вихревого ядра.

В более ранних работах по математическому моделированию винтовых вихрей рассматривался частный случай вихревого ядра — только с постоянным распределением завихренности (тип Рэнкина). Автор [5] численно обнаружил корреляцию между полем скорости, индуцированным винтовым вихрем с таким конечным ядром, и полем скорости, индуцируемым бесконечно тонкой вихревой нитью. Он объединил решение для вихревой нити с обобщенным способом аппроксимации уравнений Био–Савара, приведенным в работе [6]. Дополнительное поправочное слагаемое с использованием специального W -интеграла после выделения сингулярностей в решении для нити было позже записано и аналитически подтверждено в исследовании [7]. В специальной методике [5] использовались скорости, индуцированные винтовой нитью на конечных расстояниях от ее оси, подсчитанные с помощью бесконечных рядов каптейновского типа [8–10], чтобы сравнить ее со значением, полученным другим методом через аппроксимацию винтового вихря соприкасающимся вихревым кольцом с подобным вихревым ядром типа Рэнкина. В дальнейшем подход [5] был улучшен двумя способами выделения сингулярности в рядах Каптейна [7, 11, 12], но только для случая равномерного распределения завихренности в ядре. Однако базовый эксперимент [1], и последние несколько экспериментальных исследований [13, 14] и численных расчетов [15, 16] однозначно диагностируют только гауссово распределение завихренности в ядре винта. Из-за сложности уравнений, регулирующих само индуцированное движение винтовых вихрей, пока еще не удавалось получить решение, описывающее движение с гауссовым ядром. Такого результата можно достигнуть с помощью обобщения разложения Дайсона для закона Био–Савара, индуцирующего поле скоростей для винтовых вихрей с любым распределением завихренности в конечном ядре, которое на винтовой оси заменяется суммой сингулярностей разной степени: монополю, диполем и т.д. Аппроксимация индуцированной скорости для обоих винтовых вихрей с распределениями завихренности Рэнкина и Гаусса в конечном ядре была предложена авторами [17, 18] с некоторым ограничением на эти приближения из монополя и диполя. Следует отметить, что оба решения в работах [17, 18] не использовались для оценки самоиндуцированного движения спирального вихря, но они будут приведены ниже в настоящей статье. Существенный результат получен при сравнении данных, вычисленных по схеме [5] и по новому алгоритму, основанному на решениях [17] для ядра Рэнкина с целью установления их корреляции, а следующим результатом является определение самоиндуцированного движения винтового вихря с гауссовым вихревым ядром.

Статья организована следующим образом. В разделах 1 и 2 напомним аппроксимацию для рядов Каптейна с добавлением некоторых слагаемых и приводится описание поля скоростей, индуцированное монополюльной и дипольной винтовыми нитями, скорректированное новыми слагаемыми в обоих приближениях. В разделе 3 описывается метод Дайсона. В разделах 4 и 5 обсуждается идеальная корреляция двух решений для винтового вихря с конечным ядром типа Рэнкина и выполняется проверка скорости самоиндукции для вихря с гауссовым ядром с помощью решения уравнений Навье–Стокса, предложенного в исследовании [16]. Раздел 6 — заключение.

1. Аппроксимация рядов Каптейна

В качестве основы для определения движения монополярных и дипольных спиральных нитей используются ряды Каптейна, присутствующие в решении Кавады–Хардина [8–10]. Эти ряды можно записать в виде [11]

$$H_M^{I,J}(a, b, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} m^M I_m^{(I)}(ma) K_m^{(J)}(mb) \cdot e^{im\chi}, \quad (1)$$

где $I_m^{(0)}(ma)$ и $K_m^{(0)}(mb)$ — модифицированные функции Бесселя и соответствующие их производные. В работе [11] была выведена точная аналитическая аппроксимация ряда Каптейна (1), включающая пять основных слагаемых и малый остаток, которым можно пренебречь. Для решения поставленной задачи напомним эту эффективную процедуру вычисления рядов Каптейна для монополярной нити [12], чтобы обобщить ее на случай диполя:

$$H_M^{I,J}(a, b, \chi) = \lambda^{I,J} \left[B_{M,0}^{I,J} \frac{e^{\xi+i\chi}}{(e^{\xi} - e^{i\chi})^2} + B_{M,1}^{I,J} \frac{e^{i\chi}}{e^{\xi} - e^{i\chi}} + B_{M,2}^{I,J} \ln(1 - e^{-\xi+i\chi}) + \right. \\ \left. + B_{M,3}^{I,J} \text{Li}_2(e^{-\xi+i\chi}) + B_{M,4}^{I,J} \text{Li}_3(e^{-\xi+i\chi}) \right] + R_M^{I,J}(a, b, \chi), \quad (2)$$

где $\text{Li}_k(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^k}$, $|z| < 1$ — полилогарифмы, $e^{\xi} = \frac{a \exp(\sqrt{1+a^2})(1 + \sqrt{1+b^2})}{b(1 + \sqrt{1+a^2}) \exp(\sqrt{1+b^2})}$,

$$\lambda^{I,J} = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{1+a^2})^{I-\frac{1}{2}} (\sqrt{1+b^2})^{J-\frac{1}{2}}}{a^I (-b)^J} \text{ и } \mathbf{B}^{I,J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \alpha^{I,J} & \beta^{I,J} & \gamma^{I,J} \\ 0 & 1 & \alpha^{I,J} & \beta^{I,J} & \gamma^{I,J} & 0 \\ 1 & \alpha^{I,J} & \beta^{I,J} & \gamma^{I,J} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Компоненты матрицы $\mathbf{B}^{I,J}$, которые используются для расчета поля скорости во всем пространстве, определяются как

$$\alpha^{I,J}(x, y) = (1-I)\theta_1(x) - (1-J)\theta_1(y) + I v_1(x) - J v_1(y),$$

$$\beta^{I,J}(x, y) = (1-I)\theta_2(x) + (1-J)\theta_2(y) + I v_2(x) + J v_2(y) - \\ - (1-I)(1-J)\theta_1(x)\theta_1(y) - J(1-I)\theta_1(x)v_1(y) - I(1-J)\theta_1(y)v_1(x) - IJv_1(x)v_1(y),$$

$$\gamma^{I,J}(x, y) = (1-I)\theta_3(x) - (1-J)\theta_3(y) + I v_3(x) - J v_3(y) + \\ + (1-I)(1-J)[\theta_1(x)\theta_2(y) - \theta_2(x)\theta_1(y)] + J(1-I)[\theta_1(x)v_2(y) - \theta_2(x)v_1(y)] - \\ + I(1-J)[\theta_2(y)v_1(x) - \theta_1(y)v_2(x)] + IJ[v_1(x)v_2(y) - v_2(x)v_1(y)].$$

Функции, входящие в определения $\alpha^{I,J}$, $\beta^{I,J}$, $\gamma^{I,J}$, являются полиномами от $t \equiv x = (1+a^2)^{-1/2}$ или $t \equiv y = (1+b^2)^{-1/2}$: $\theta_1 = (3t - 5t^3)/24$, $v_1 = (-9t + 7t^3)/24$;

$$\theta_2 = (81t^2 - 462t^4 + 385t^6)/1152, \quad v_2 = (-135t^2 + 594t^4 - 455t^6)/1152;$$

$$\theta_3 = (30375t^3 - 369603t^5 + 765765t^7 - 425425t^9) / 414720,$$

$$v_3 = (-42525t^3 + 451737t^5 - 883575t^7 + 475475t^9) / 414720.$$

Малый регулярный остаток в (2) определяется соотношением

$$R_M^{I,J} = \sum_{m=1}^{\infty} r_{im}(a, b, I, J, M) \cdot e^{im\chi} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left[m^M I_m^{(I)}(ma) K_m^{(J)}(mb) - m^M \lambda^{I,J} \left(e^{\xi} \right)^m \left(1 + \frac{\alpha^{I,J}}{m} + \frac{\beta^{I,J}}{m^2} + \frac{\gamma^{I,J}}{m^3} \right) \right] e^{im\chi}. \quad (3)$$

Получение точных результатов для расчета течений с помощью ряда (1) в азимутальном направлении сопряжено с ошибками из-за приближения бесконечного ряда конечным набором гармоник. В настоящей работе для правильного моделирования поля скоростей используется приближение (2), в котором остаточный член (3) мал, и им в формуле (2) можно пренебречь на основании данных табл. 1 и рис. 5 из работы [11].

2. Поле скоростей, индуцированное монополярными и дипольными винтовыми нитями

Начнем с определения геометрии винтовой нити радиуса R в соответствии с рис. 1а из статьи [19]. Шаг винта $L = 2\pi l$ определяется как смещение вдоль оси при одном обороте винта, а угол винта определяется соотношением $\tan \phi = L/2\pi R$ с соответствующим кручением винта $\tau = l/R$. Кроме того, абсолютная скорость U , индуцированная винтовым вихрем с конечным ядром радиуса $\varepsilon = \sigma R$, определяется либо через бинормальную U_b и тангенциальную U_t компоненты, либо через осевую U_z и азимутальную U_θ проекции скорости. В контексте этих же компонент полной скорости U будут определены компоненты скоростей, индуцированных монополярной или дипольной нитями, но с использованием символов u и v соответственно.

В цилиндрических координатах (r, θ, z) , согласно решению Кавады–Хардина [8–10], осевая u_z и азимутальная u_θ компоненты скорости, индуцированной монополярной винтовой нитью вне сингулярного ядра, имеют вид

$$u_\theta(r, R, \chi) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{\Gamma a}{\pi r l} \left\{ \begin{matrix} H_1^{0,1}(r/l, R/l, \chi) \\ H_1^{1,0}(R/l, r/l, \chi) \end{matrix} \right\}, \quad u_z(r, R, \chi) = \frac{\Gamma}{2\pi l} - \frac{r}{l} u_\theta(r, R, \chi), \quad (4)$$

где $\chi = \theta - z/l$, верхнее выражение в фигурных скобках соответствует случаю $r < R$, а нижнее — $r > R$.

Первое представление поля скоростей, индуцированного дипольной винтовой нитью, было получено с помощью точного аналитического приближения через ряды Каптейна в работах [17, 18]:

$$v_\theta = 4d \frac{R^2 + l^2}{rRl^2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{matrix} H_2^{0,0}(r/l, R/l, \chi) \\ H_2^{0,0}(R/l, r/l, \chi) \end{matrix} \right\}, \quad v_z = -4d \frac{R^2 + l^2}{Rl^3} \operatorname{Re} \left\{ \begin{matrix} H_2^{0,0}(r/l, R/l, \chi) \\ H_2^{0,0}(R/l, r/l, \chi) \end{matrix} \right\}, \quad (5)$$

где d — интенсивность дипольного момента с бинормальным направлением вектора дипольного момента к винтовой нити.

3. Метод Дайсона для аппроксимации винтового вихря с конечным ядром

В соответствии с процедурой, описанной в статье [17], поясним основные моменты метода Дайсона, который будет использоваться для вывода окончательных уравнений, определяющих компоненты полной скорости U . В работе [20] для исследования колец Сатурна Дайсон предложил оригинальный высокоточный метод оценки поля скоростей в окрестности ядра осесимметричного вихревого кольца с распределением завихренности, пропорциональным расстоянию от оси кольца. Использование оператора сдвига и свойств гармонических функций для поля скоростей вблизи ядра позволило получить эффективные асимптотические разложения высокого порядка, зависящие от малого параметра — соотношения радиусов ядра и кольца. Этот метод был обобщен для осесимметричного вихревого кольца с произвольным распределением завихренности, а формула для самоиндуцированного движения вязкого вихревого кольца была улучшена для более высоких порядков [21]. По сути, методика Дайсона крайне важна для достижения разложений высокого порядка, так как в противном случае разложения могут столкнуться с рядом неопределенных условий. В дальнейшем было снято ограничение осевой симметрии для метода Дайсона [17], в соответствии с которым для винтовой вихревой трубки влияние ее конечного ядра было успешно представлено в виде мультипольных разложений. Здесь малый параметр σ представляет собой отношение радиуса ядра к обычному радиусу кривизны. В указанной работе сначала с помощью операторов сдвига было выполнено интегрирование по сечению ядра в объемном интеграле, которое затем привело его к линейному интегралу. Главным член разложения интеграла Био–Савара был представлен цепочкой монополюльных особенностей, расположенных на центральной линии винтовой вихревой трубки. Интенсивность монополюлей равна циркуляции винтового вихря. Следующий вклад дает цепочка диполей, интенсивность которых зависит от распределения завихренности в ядре. Ключевым фактором для диполей является влияние кривизны и кручения винта. Как и в случае монополюлей (4), поле скоростей для винтовой дипольной нити записывается в виде рядов каптейновского типа (5). В настоящем исследовании, основанном на оценках [17], рассмотрим только вклад двух этих особенностей:

$$U_z = u_z + v_z, \quad U_\theta = u_\theta + v_\theta, \quad U_b = u_b + v_b, \quad U_t = u_t + v_t, \quad (6)$$

где бинормальные и тангенциальные компоненты скорости коррелируют соответственно с азимутальной и осевой компонентами u_θ и u_z или v_θ и v_z через очевидные соотношения [5, 12]:

$$u_b = \frac{\tau u_\theta - u_z}{\sqrt{1 + \tau^2}}, \quad u_t = \frac{u_\theta + \tau u_z}{\sqrt{1 + \tau^2}} \quad \text{и} \quad v_b = \frac{\tau v_\theta - v_z}{\sqrt{1 + \tau^2}}, \quad v_t = \frac{v_\theta + \tau v_z}{\sqrt{1 + \tau^2}}.$$

Следует отметить, что относительное смещение вихря определяется только величинами u_b и v_b , в то время как u_t дает чисто тангенциальное движение вдоль оси, а с помощью подстановки (5) в $v_t = v_z + rv_\theta/l$ находим, что v_t равно нулю. В соответствии с разделом 2 достаточная точность для бесконечного суммирования главных составляющих скоростей u и v в (6) достигается при выделении сингулярностей с помощью замкнутой аналитической формы (2).

4. Сравнение двух методов расчета для вихря с ядром Рэнкина

Следующий вопрос, который представляет интерес, касается проверки метода Дайсона для описания самоиндуцированного движения спирального вихря с конечным размером ядра постоянной завихренности через представления скорости монополюльной и дипольной сингулярными вихревыми нитями (6). Простой способ оценки скорости

в вихре состоит в том, чтобы взять значение U между двумя диаметрально противоположными точками на радиусе ядра вихря $R = \varepsilon/\sigma$, то есть в точке $(r, \theta, z) = (R \pm \varepsilon, 0, 0)$, тогда движение вихря будет представлено средним из этих двух значений:

$$U_{b_{\text{slnd}}} = \frac{1}{2} [U_b(R - \varepsilon) + U_b(R + \varepsilon)] \equiv \frac{1}{2} [u_b(R - \varepsilon) + v_b(R - \varepsilon) + u_b(R + \varepsilon) + v_b(R + \varepsilon)]. \quad (7)$$

Ранее эта процедура использовалась для монопольной нити только с u_b , но такой анализ, проведенный в [5, 7, 11], требует дополнительной поправки для конечного ядра, найденного прямым сравнением с решением для соответствующего вихревого кольца [6]. Первая реалистичная формула для бинормальной скорости спирального вихря с конечным ядром $U_{b_{B\&W}} = \frac{1}{2} [u_b(R - \varepsilon) + u_b(R + \varepsilon)] + \Delta_\varepsilon$ была получена в [7]:

$$\frac{4\pi R}{\Gamma} U_{b_{B\&W}} = \frac{1}{1 + \tau^2} \left[\ln\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \frac{1}{4} + 2\tau^2 - 2\tau\sqrt{1 + \tau^2} - \ln\sqrt{1 + \tau^2} + (1 + \tau^2)^{3/2} W(\tau) \right], \quad (8)$$

где дополнительный член « $1/4$ » в квадратной скобке определяет поправку Δ_ε , связанную

с конечным ядром вихря, а $W(\tau) = \int_0^\infty \left\{ \frac{\sin^2 t}{[\tau^2 t^2 + \sin^2 t]^{3/2}} - \frac{1}{[\tau^2 + 1]^{3/2}} \frac{H(1/2 - t)}{t} \right\} dt$

описывает регулярную часть ряда Каптейна с вычитанием полюса $1/\sigma$ и логарифма $\ln(1/\sigma)$ из исходного представления рядов (1), где $H(\cdot)$ обозначает ступенчатую функцию. Однако для винтовых вихревых нитей уравнение (8), как и закон Био–Савара, не могут быть проинтегрированы в простом аналитическом виде, поэтому W было найдено численно с точностью до шести значащих цифр для 21 значения шага τ , что приведено в таблице исследования [7]. Как и ранее, аналитическая форма ряда Каптейна (2) в сочетании с формулами (4) и (5) после подстановки в (7) будет использоваться для получения аналитических выражений для самоиндуцированных скоростей. Для сравнения методики Дайсона (7) с формулой (8) понадобится значение интенсивности дипольного момента для вихря Ранкина в ядре вихря. Оценка из [17] дает формулу

$$d_R = -3\Gamma \sigma^2 / 16\pi. \quad (9)$$

Бинормальная скорость (см. 2 на рис. 1) вычисляется как функция кручения с использованием новой аналитической формулы (7). Она сравнивается с решением 1 из [7], где использовалась W -интегральная формула (8). Результаты, полученные обоими методами демонстрируют отличную согласованность, что доказывает высокую точность методики Дайсона для определения самоиндуцированной скорости спиральных вихрей с ядром Рэнкина. Дополнительно была проверена аппроксимация (2) рядов Каптейна для полей скоростей, индуцированных монопольной и дипольной нитями.

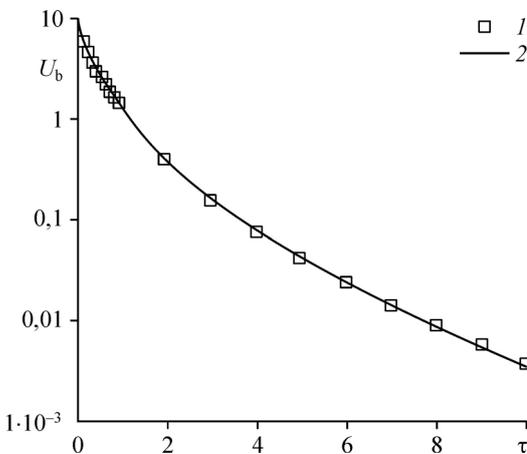
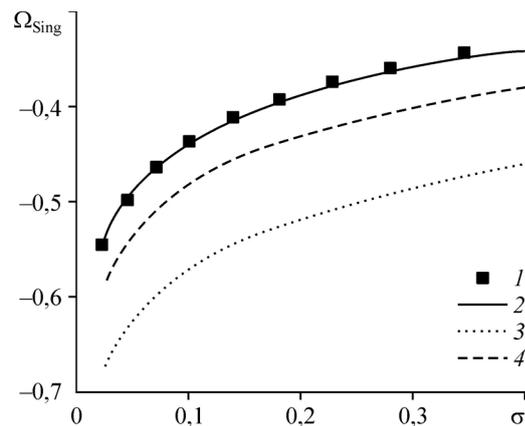


Рис. 1. Корреляции безразмерной бинормальной скорости винтового вихря с ядром Рэнкина, рассчитанной разными методами. Символы 1 совпадают с $U_{b_{B\&W}}$, рассчитанной по формуле (8) из работы [7], 2 — бинормальная скорость U_b , рассчитанная по используемому в настоящей работе аналитическому разложению (7) и (9) в соответствии с методом Дайсона [20].

Рис. 2. Угловая скорость движения винтового вихря $\Omega_{\text{Sind}} = (-U_b / \sin \phi) / R$ [11] с шагом $\tau = 0,5$, как функция радиуса ядра вихря σ с распределением завихренности гауссовского типа.

1 — численное моделирование с помощью метода DNS [16], 2 — расчет по формуле (7) с интенсивностью диполя (10), 3 — неточные данные по первым двум членам из (2) при $d = 0,103$ из работы [17], 4 — угловая скорость вихря с ядром типа Рэнкина, рассчитанная по (7) и (9) настоящей работы или по (8) из работы [7].



5. Самоиндуцированная скорость для винтового вихря с гауссовым ядром

Для получения самоиндуцированной скорости винтового вихря используем подход Дайсона (7) для оценки поля скорости, индуцированного в окрестности с непостоянным, гауссовым распределением завихренности в ядре. В противоположность с вихрем Рэнкина (9) интенсивность дипольного момента для гауссова распределения завихренности принимает другое значение. Сопоставление с экспериментальными данными [16] дает формулу

$$d_G = -0,13. \quad (10)$$

На рис. 2 самоиндуцированная угловая скорость, рассчитанная через бинормальную компоненту (7) для гауссова вихревого ядра (линия 2) с интенсивностью диполя (10), дает хорошее согласование с данными прямого численного моделирования (DNS), основанного на решении уравнений Навье–Стокса для развития ядра винтового вихря во времени с фиксированным шагом $l = 0,5$ (см. рис. 9b из работы [16]). Таким образом, впервые в замкнутой форме было получено решение (7) с интенсивностью диполя (10) для описания движения винтового вихря в пространстве с гауссовым распределением завихренности в ядре.

Заключение

В представленной работе проверена методика Дайсона для определения поля скоростей в окрестности спиральных вихрей с ядром Рэнкина путем прямого сравнения с другой оценкой самоиндуцированной скорости, полученной с помощью моделирования Рикки [1], аналитически доказанного авторами [3]. Продемонстрирована высокая точность методики Дайсона, что открывает возможность для разработки новых фундаментальных решений, в частности, для спирального вихря с гауссовым ядром. Предложенные решения могут быть использованы для описания различных типовых распределений завихренности в ядре вихря, которые дают более реалистичное описание в приложениях, например, для концевых вихрей за роторами, торнадо или приосевых вихрей в аэродинамических устройствах, таких как вихревые аппараты и генераторы: циклонные сепараторы и камеры сгорания и т.д.

Список литературы

1. Алексеев С.В., Окулов В.Л. Закрученные потоки в технических приложениях (обзор) // Теплофизика и аэромеханика. 1996. Т. 3, № 2. С. 101–138.
2. Nygaard N.G. Wakes in very large wind farms and the effect of neighbouring wind farms // J. Physics: Conference Series. 2014. Vol. 524, No. 1. P. 012162.

3. Okulov V.L., Kabardin I.K., Litvinov I.V., Mikkelsen R.F., Naumov I.V., Sørensen J.N., Wood D.H., Alekseenko S.V. Hydrokinetic energy conversion: the basis of hydro farm // In Abs. 5th International Workshop on Heat/Mass Transfer Advances for Energy Conservation and Pollution Control August 13–16 2019. Novosibirsk, Russia. P. 134–134.
4. Alekseenko S.V., Shtork S.I., Swirling flow large-scale structures in a combustor model // Russ. J. Eng. Thermophys. 1992. Vol. 2, No. 4. P. 231–266.
5. Ricca R.L. The effect of torsion on the motion of a helical vortex filament // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 273. P. 241–259.
6. Moore D.W., Saffman P.G. The motion of a vortex filament with axial flow // Phil Trans R Soc Lond A. 1972. Vol. 272. P. 403–429.
7. Boersma J., Wood D.H. On the self-induced motion of a helical vortex // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 384. P. 263–279.
8. Kawada S. Induced velocity by helical vortices // J. Aeronaut. Sci. 1936. Vol. 3, No. 3. P. 86–87.
9. Hardin J.C. The velocity field induced by a helical vortex filament // Phys. Fluids. 1982. Vol. 25. P. 1949–1952.
10. Fukumoto Y., Okulov V.L., Wood D.H. The contribution of Kawada to the analytical solution for the velocity induced by a helical vortex filament // ASME. Appl. Mech. Rev. 2015. Vol. 67, No. 6. P. 060801.
11. Okulov V.L. On the stability of multiple helical vortices // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 521. P. 319–342.
12. Okulov V.L., Sørensen J.N. The self-induced motion of a helical vortex // J. Fluid Mech. 2020. Vol. 883. A-5.
13. Quaranta H.U., Bolnot H., Leweke T. Long-wave instability of a helical vortex // J. Fluid Mech. 2015. Vol. 780. P. 687–716.
14. Okulov V.L., Kabardin I.K., Mikkelsen R.F., Naumov I.V., Sørensen J.N. Helical self-similarity of tip vortex cores // J. Fluid Mech. 2019. Vol. 859. P. 1084–1097.
15. Ali M., Abid M. Self-similar behavior of a rotor wake vortex core // J. Fluid Mech. 2014. Vol. 740. R1.
16. Selçuk C., Delbende I., Rossi M. Helical vortices: quasiequilibrium states and their time evolution // Physical Review Fluids. 2017 Vol. 2. P. 084701.
17. Fukumoto Y., Okulov V.L. The velocity field induced by a helical vortex tube // Phys. Fluids, 2005. Vol. 7, No. 10. P. 107101.
18. Окулов В.Л., Фукумото Я. Вихревой диполь // Доклады Академии наук. 2004. Т. 399, № 1. С. 56–61.
19. Окулов В.Л., Гешева Е.С., Куйбин П.А., Шторк С.И., Соренсен Й.Н., Вуд Д., Алексеенко С.В. Различие в перемещении винтового вихря и движении частиц вдоль его оси // Теплофизика и аэромеханика. 2020. Т. 27, № 4.
20. Dyson F.W. The potential of an anchor ring. II // Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 1893. Vol. 184. P. 1041–1106.
21. Fukumoto Y., Moffatt H.K. Motion and expansion of a viscous vortex ring // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 417. P. 1–45.

*Статья поступила в редакцию 22 апреля 2020 г.,
после доработки — 9 июня 2020 г.,
принята к публикации 26 июня 2020 г.*