

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ЗАДАЧА РАДИАЦИОННОЙ КИНЕТИКИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Н. Г. Преображенский, А. Е. Суворов

(Новосибирск)

1. Нестационарный перенос линейчатого излучения в нагретом газе (низкотемпературной плазме) чаще всего описывают с помощью кинетического уравнения для возбужденных атомов [1]. При этом в зависимости от конкретной ситуации возникают задачи с соответствующими начальными и граничными условиями. Особенности решения, обусловленные различными граничными условиями (разные конфигурации рассматриваемого объема газа, наличие или отсутствие отражающих поверхностей и т. п.), уже до известной степени исследовались, хотя анализ относился, как правило, к стационарному аналогу кинетического уравнения. Что же касается начальных условий, то до сих пор подразумевалось, что в некоторый исходный момент времени ($t = t_0$) имеет место равномерное распределение возбужденных атомов по всему объему газа. Во многих задачах радиационной кинетики подобное предположение совершенно не соответствует реальному положению дел: разнообразны случаи локального выделения энергии, лазерное возбуждение, скин-эффект и т. п. Тем самым возникает потребность в более общей постановке задачи радиационной кинетики (прежде всего, в ее элементарной форме, которой соответствует известное уравнение Бибермана — Холстейна) при любых начальных распределениях плотности возбужденных состояний.

2. Изменение во времени концентрации n возбужденных атомов среды после прекращения возбуждения описывается уравнением [1, 2]

$$(2.1) \quad \tau_0 \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -n(\mathbf{r}, t) + \int_V n(\mathbf{r}', t) D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

где τ_0 — время спонтанного высвечивания; $D(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — вероятность для кванта, испущенного в точке $\mathbf{r}'$, оказаться поглощенным в точке $\mathbf{r}$

$$(2.2) \quad D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi H} \int_0^\infty \kappa^2(\nu) \frac{\exp[-\kappa(\nu)|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d\nu,$$

где $\kappa(\nu)$ — коэффициент поглощения; $H = \int_0^\infty \kappa(\nu) d\nu$. В случаях цилиндрической и сферической конфигурации светящегося газа уравнение (2.1) принимает вид

$$(2.3) \quad \frac{\partial n(r, t)}{\partial t} = -n(r, t) + \int_0^1 n(r', t) G(r, r') dr',$$

где время измеряется в единицах τ_0 , а координата — в радиусах сферы или цилиндра ($\tau_0 = R = 1$).

Уравнение (2.3) имеет решение для любого начального распределения плотности $n_0(r)$ возбужденных атомов

$$(2.4) \quad n(r, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \exp[-\lambda_m t] C_m \varphi_m(r),$$

где λ_m и φ_m — собственные значения и собственные функции интегрального уравнения — связаны следующим соотношением [3]:

$$\varphi_m(r) - \int_0^1 \varphi_m(r') G(r, r') dr' = \lambda_m \varphi_m(r).$$

Коэффициенты C_m определяются начальным условием

$$C_m = \frac{\int_0^1 n_0(r) \varphi_m(r) r^\alpha dr}{\int_0^1 \varphi_m^2(r) r^\alpha dr}, \quad \alpha = \begin{cases} 2 & \text{— сфера,} \\ 1 & \text{— цилиндр.} \end{cases}$$

3. Для численного решения уравнения (2.3) удобно представить ядро $G(r, r')$ в виде разложения по параметру оптической плотности.

Сфера. Интегрируя в (2.1) по нерадиальным координатам, находим

$$G(r, r') = \frac{1}{2H} \frac{r'}{r} \int_0^\infty \kappa^2(v) \{E_i[-\kappa(v)(r+r')] - E_i[-\kappa(v)|r-r'|]\} dv,$$

где $E_i(-x)$ — интегральная показательная функция. Воспользовавшись разложением [4]

$$E_i(-x) = c + \ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-x)^m}{mm!},$$

можно получить

$$G(r, r') = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m k_0^{m+1} (-1)^m}{mm!} [(r+r')^m - |r-r'|^m] \frac{r'}{r} + \\ + a_0 k_0 \ln \left| \frac{r+r'}{r-r'} \right| \frac{r'}{r},$$

где k_0 — коэффициент поглощения в центре линии

$$(3.1) \quad a_m = \int_0^\infty \frac{\kappa(v)}{H} \left(\frac{\kappa(v)}{k_0} \right)^{m+1} dv.$$

Цилиндр. Вводя цилиндрические координаты, из (2.2) найдем

$$(3.2) \quad G(r, r') = \frac{1}{2\pi H} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{\kappa^2(v)}{q} dv \int_1^\infty \frac{\exp(-\kappa(v)qx)}{x(x^2-1)^{1/2}} r' dx,$$

$$q = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi)^{1/2}.$$

Пользуясь интегральным представлением Гублера для цилиндрических функций [4]

$$K_0(\xi) = \int_1^\infty \frac{\exp(-\xi x)}{(x^2-1)^{1/2}} dx,$$

(3.2) можно преобразовать к виду, удобному для разложения,

$$(3.3) \quad G(r, r') = \frac{1}{2\pi H} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \kappa^2(v) \left[\frac{\pi}{2} - \int_0^{\kappa(v)q} K_0(\xi) d\xi \right] \frac{r'}{q} dv,$$

где $K_0(\xi)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента (функция Макдональда), определяемая разложением в ряд [4]

$$(3.4) \quad K_0(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\xi/2)^{2m}}{(m!)^2} \left\{ \psi(m+1) - \ln \frac{\xi}{2} \right\},$$

$$\psi(x) = d \ln \Gamma(x) / dx.$$

Для целого аргумента она равна $\psi(m+1) = -c + \sum_{i=1}^m \frac{1}{i}$, где $c=0,5772$ — постоянная Эйлера.

С помощью (3.4) интегрирование по φ в (3.3) приводит к следующим выражениям:

$$L = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{q} = \begin{cases} \frac{1}{r} K(r'/r) & r > r' \\ \frac{1}{r'} K(r/r') & r < r', \end{cases}$$

где $K(x)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода,

$$S_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q^{2\mu} d\varphi = 2 |r^2 - r'^2|^\mu P_\mu \left(\frac{r^2 + r'^2}{|r^2 - r'^2|} \right);$$

$$U_\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q^{2\mu} \ln q d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\partial S_\mu}{\partial \mu};$$

$P_\mu(x)$ — функция Лежандра.

При целых $\mu = m$ U_m и S_m можно вычислить с помощью рекуррентного соотношения для P_μ [4]. В результате несложных вычислений получим

$$(2\mu + 1)P_\mu(x) = (\mu + 1)P_{\mu+1}(x) + \mu P_{\mu-1}(x),$$

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x,$$

$$S_{m+1} = \left(1 + \frac{m}{m+1}\right)(r^2 + r'^2)S_m - \frac{m}{m+1}|r^2 + r'^2|S_{m-1},$$

$$S_0 = 2, S_1 = 2(r^2 + r'^2),$$

$$U_{m+1} = \left(1 + \frac{m}{m+1}\right)(r^2 + r'^2)U_m - \frac{m}{m+1}|r^2 - r'^2|U_{m-1} +$$

$$+ \frac{1}{2(m+1)^2}(r^2 + r'^2)S_m - \frac{1}{2(m+1)^2}|r^2 - r'^2|S_{m-1},$$

$$U_0 = \ln \frac{r^2 + r'^2 + |r^2 - r'^2|}{2},$$

$$U_1 = (r^2 + r'^2)(U_0 + 1) - |r^2 - r'^2|.$$

Вводя интегралы по частоте

$$b_m = \int_0^\infty \frac{\kappa(v)}{H} \left(\frac{\kappa(v)}{k_0} \right)^{m+1} \ln \frac{\kappa(v)}{2} dv,$$

запишем окончательное выражение для $G(r, r')$

$$G(r, r') = r' a_0 L + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{k_0}{2}\right)^{2m+1} r'}{(2m+1)(m!)^2} \times$$

$$\times [(\bar{U}_m - S_m/(2m+1) - S_m \psi(m+1)) a_{2m+1} + S_m b_{2m+1}],$$

a_m определены в (3.1). В случае доплеровского и дисперсионного профилей линий поглощения интегралы a_m и b_m вычисляются точно: доплеровский профиль

$$\kappa(v) = k_0 \exp\left\{-\left(\frac{v-v_0}{\Delta v_D}\right)^2\right\}, \quad a_m = 1/(m+2)^{1/2},$$

$$b_m = a_m [\ln(k_0/2) - 1/2(m+2)];$$

дисперсионный профиль

$$\kappa(v) = k_0 \frac{(\Gamma/2)^2}{(v-v_0)^2 + (\Gamma/2)^2},$$

$$a_m = \frac{(2m+2)!}{[(m+1)!]^2 2^{2m+2}}, \quad b_m = a_m \left[\ln \frac{k_0}{8} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{i(2i-1)} \right].$$

Ниже рассматриваются только эти профили линии, переход к более сложным случаям (например, профилю Фойгта) принципиальных трудностей не вызывает и лишь делает расчеты несколько более громоздкими.

4. Выберем на отрезке $[0, 1] 2N+1$ равноотстоящих точек $r_1, \dots, r_{2N+1}$ и рассмотрим соответствующий дискретный вариант уравнения (2.3)

$$(4.1) \quad \frac{dn(r_i, t)}{dt} = -n(r_i, t) + \int_0^1 G(r_i, r') n(r', t) dr'.$$

Пусть шаг разбиения равен $h = 1/2N$. Тогда на каждом отрезке длиной $2h$ приближенно заменим $n(r, t)$ участком параболы

$$(4.2) \quad n(r, t) = n(r_{i-1}, t) \frac{(r-r_i)(r-r_{i+1})}{2h^2} +$$

$$+ n(r_i, t) \frac{(r-r_{i-1})(r-r_{i+1})}{h^2} + n(r_{i+1}, t) \frac{(r-r_{i-1})(r-r_i)}{2h^2}.$$

После интегрирования по радиусу (4.1) становится системой линейных уравнений

$$(4.3) \quad \frac{\partial n_i(t)}{\partial t} = - \sum_j A_{ij} n_j(t),$$

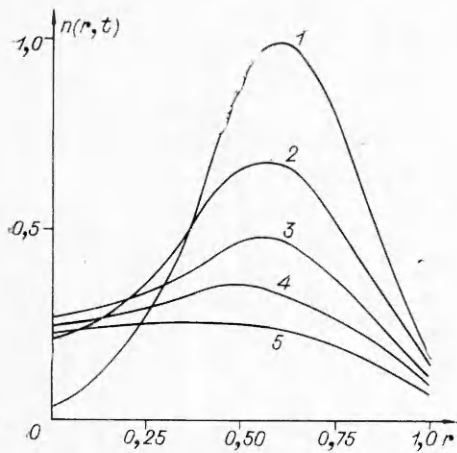
$$n_i(t) = n(r_i, t), \quad A_{ij} = -\delta_{ij} + G_{ij},$$

где G_{ij} — результат интегрирования G с весами из (4.2). Интегрирование производилось на ЭВМ. Система (4.3) имеет решение

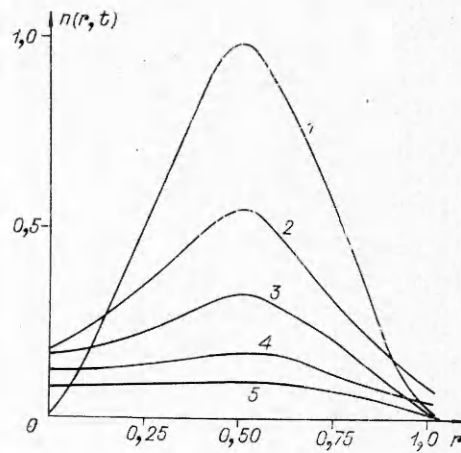
$$(4.4) \quad n_i(t) = \sum_{m=1}^{2N+1} C_m \exp(-\lambda_m t) y_{im},$$

где λ_m и y_{im} — собственные значения и принадлежащие им собственные векторы матрицы A_{ij} . Коэффициенты C_m можно найти из начального условия

$$(4.5) \quad n_i(0) = \sum_{m=1}^{2N+1} C_m y_{im}.$$



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Выражению (4.4) соответствуют первые $2N + 1$ слагаемых в (2.4).

5. В качестве примера для вычислений выбрано начальное распределение $n_0(r) = \exp \{-(r - r_0)/\sigma\}^2\}$. Картина затухания при сферической геометрии, доплеровском профиле и $r_0 = 0,6$, $\sigma^2 = 0,1$, $k_0 = 3$ показана на фиг. 1. Результат расчета для случая цилиндрической геометрии и дисперсионного профиля изображен на фиг. 2 ($r_0 = 0,5$, $\sigma^2 = 0,1$, $k_0 = 3$). В обоих случаях 1 — $t = 0$, 2 — 1, 3 — 2, 4 — 3, 5 — 4.

Обозначим $\min \{\lambda_i\} = \lambda$; $\tau = 1/\lambda$, соответствующую собственную функцию $y(r)$. Из (2.4) видно, что при достаточно больших временах

$$(5.1) \quad n_i(t) = C y_i \exp [-t/\tau].$$

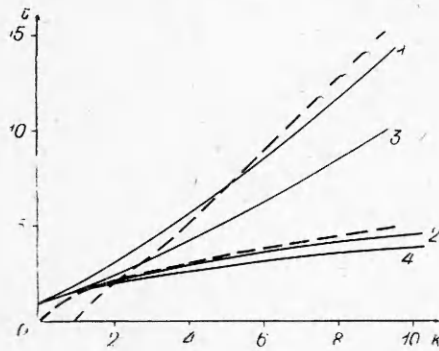
Асимптотические выражения для τ при больших оптических толщинах k_0 даны в работе [1] применительно к цилиндрической геометрии объема газа

$$(5.2) \quad \tau = k_0(\pi \ln k_0)^{1/2}/1,60$$

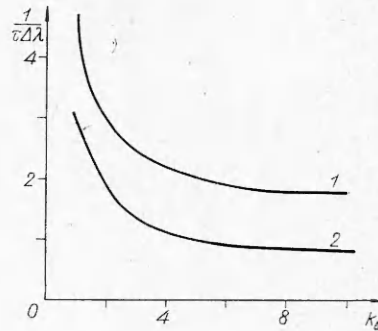
для доплеровского профиля и

$$(5.3) \quad \tau = (\pi k_0)^{1/2}/1,115$$

для дисперсионного профиля. (При нашем выборе переменных τ и k_0 — величины безразмерные.) Интересно сравнить (5.2) и (5.3) с точными значениями, полученными в данной работе. Результаты сравнения приведены на фиг. 3. Кривые 1 и 2 соответствуют доплеровскому и дисперсионному профилям в случае цилиндрической геометрии, штрих — соответствующие оценки Холстейна, кривые 3 и 4 соответствуют тем же профилям в случае сферической геометрии. Видно, что если достаточно лишь грубая оценка величины $\sim 10\%$, то можно использовать (5.2), (5.3), начиная уже с $k_0 = 5$, здесь же для сравнения приведены значения τ , относящиеся к случаю сферической конфигурации. Видно, что сфера высвечивается быстрее, что, разумеется, ясно из качественных соображений. В работе [5] решалось нестационарное уравнение (2.3) для случая цилиндрической конфигурации и дисперсионного профиля линии поглощения, исследован случай больших значений k_0 . Как и следовало ожидать, результаты данной работы при достаточно больших k_0 согласуются с [5].



Ф и г. 3



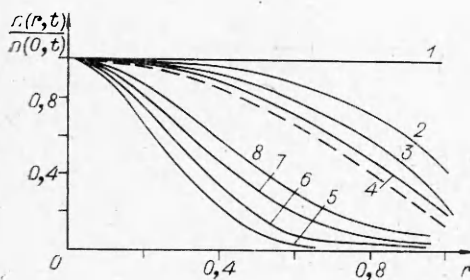
Ф и г. 4

Имея полный набор собственных чисел λ_m , несложно оценить время выхода T на асимптоту (5.1)

$$(5.4) \quad T = \ln(C_1/C\varepsilon)/\Delta\lambda,$$

где ε — относительное отклонение (5.1) от (4.5); $\Delta\lambda$ — разность между λ и ближайшим к нему собственным числом; C_1 — соответствующий коэффициент в (4.5). Зависимость отношения T/τ от оптической толщины для случая сферы показана на фиг. 4 (1 — дисперсионный профиль, 2 — доплеровский). Видно, что при больших оптических толщинах $T/\tau = \text{const}$.

Этот результат следует понимать в том смысле, что при больших оптических толщинах, как это показано в [5], все собственные числа описываются соотношениями типа (5.2), (5.3). Численные оценки хорошо согласуются с (5.4), причем от начального распределения величина T зависит довольно слабо. Исключением являются начальные распределения, которым соответствует концентрация частиц в некоторой малой области.



Ф и г. 5

В этом случае время выхода на асимптоту существенно возрастает. На фиг. 5 приведены графики решения, пронормированного на единицу в центре сферы; штриховой линией изображена собственная функция $y(r)$. Кривые 1—4 — решения с постоянным начальным значением ($\sigma = \infty$), причем шаг по времени равен 2,5. Кривые 5—8 — аналогичные решения, у которых $\sigma^2 = 0,1$, $r_0 = 0$. Видно, что вторая группа решений приближается к асимптоте гораздо

медленнее. Заметим, что согласно (5.4), если $C_1 = C$, то $n(T) \sim \varepsilon n(0)$, т. е. в тот момент, когда начинает выполняться (5.1), объем газа практически уже высвечен.

В заключение отметим, что рассмотренная выше при произвольных начальных условиях задача радиационной кинетики в ее элементарной постановке может быть сформулирована и в значительно более общем виде (см., например, [6]). В принципиальном отношении подход к ее решению при этом не изменяется.

Поступила 6 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Holstein T. Imprisonment of resonance radiation in gases.— «Phys. Rev.», 1947, vol. 72, p. 1212.
2. Биберман Л. М. К теории диффузии резонансного излучения.— ЖЭТФ, 1947, т. 17, с. 416.
3. Преображенский Н. Г. О кинетике газового лазера в условиях блокировки резонансного излучения.— В кн.: Газодинамика и физическая кинетика. Новосибирск, изд. Ин-та теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1974, с. 33.
4. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1965.
5. Голубовский Ю. Б., Лягущенко Р. И. О девозбуждении резонансных уровней в ряду цилиндрической конфигурации.— «Оптика и спектроскопия», 1975, т. 38, с. 1086.
6. Преображенский Н. Г., Сенина А. В. Спектральные характеристики оптически плотной плазмы.— «Изв. высш. учеб. заведений. Физика», 1971, № 4, с. 25.

УДК 621.375.826+533.599

ХАРАКТЕРИСТИКИ ФОТОДИССОЦИОННОГО ЛАЗЕРА
НА ЙОДИСТОМ МЕТИЛЕ

В. А. Дудкин, В. Г. Некрашевич, В. Б. Рухин

(Москва)

Йодистый метил является одним из первых веществ, которые позволили получить генерацию на переходе атома йода $5^2P_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2}$ с $\lambda = 1,315$ мкм методом импульсного фотолиза [1]. В дальнейшем показано [2, 3], что оптимальные для генерации давления йодистого метила существенно меньше по сравнению с другими соединениями, а энергетический выход в импульсе генерации ниже. Видимо, поэтому последующие исследования проводились в основном с перфторалкильными соединениями, так что данные об энергетических и временных характеристиках генерации при фотолизе CH_3I практически отсутствуют. Можно лишь указать, что в работе [4] приведена осциллограмма импульса генерации длительностью порядка 5 мкс при мощности порядка 10 Вт.

В данной работе поставлена задача получить более детальные сведения о временных и энергетических характеристиках генерации при фотолизе CH_3I , а также исследовать влияние прокачки рабочего вещества на эти характеристики, наблюдавшееся в целом ряде работ (см., например, обзор [5]). Для газодинамических лазеров возникновение инверсной заселенности тесно связано с кинетикой уменьшения температуры рабочей среды при адиабатическом расширении газа. Для электроразрядных лазеров высокой мощности конвективное охлаждение газа при прокачке позволяет улучшить их энергетические характеристики. Для лазеров с возбуждением в процессе фотодиссоциации исследований с протоком рабочего вещества до сих пор не проводилось. Ниже приведены экспериментальные результаты, полученные при работе импульсного лазера без протока и при наличии поперечного протока рабочей смеси через объем резонатора. Рабочим веществом является йодистый метил CH_3I , а также его смеси с геллем.

Эксперименты проводились на установке, схема которой приведена на фиг. 1, где 1 — импульсные лампы, 2 — вакуумная камера, 3 — отражатели, 4 — провода питания, 5 — провода поджига, 6 — окна из оргстекла, 7 — зеркала, 8 — коллектор. Накачка рабочего вещества осуществлялась двумя последовательно соединенными импульсными лампами ИФП-5000, размещавшимися на расстоянии 23 мм друг от друга внутри вакуумной камеры. Для увеличения потока излучения накачки исполь-