УДК 519.63

Разностные методы решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений дробного порядка с оператором Бесселя

М.Х. Бештоков

Институт прикладной математики иавтоматизации, Кабардино-Балкарский научный центр РАН, ул. Шортаного, 89А, Нальчик, 360000

E-mail: beshtokov_murat@rambler.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 3, Vol. 13, 2020.

Бештоков М.Х. Разностные методы решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений дробного порядка с оператором Бесселя // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 3. — С. 265–287.

Работа посвящена нелокальным краевым задачам для псевдопараболических уравнений дробного порядка с оператором Бесселя с переменными коэффициентами и разностным методам их решения. Для решения рассматриваемых задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках, из чего следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей дифференциальной задачи.

DOI: 10.15372/SJNM20200303

Ключевые слова: *нелокальные краевые задачи, априорная оценка, разностная схема, уравнение псевдопараболического типа, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Герасимова–Капуто.*

Beshtokov M.K. Difference methods for solving non-local boundary value problems for fractional-order pseudo-parabolic equations with the Bessel operator // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 3. — P. 265–287.

This paper deals with the to boundary value problems for pseudoparabolic equations of fractional order with the Bessel operator with variable coefficients with non-local boundary conditions of the integral type and difference methods for their solutions. To solve the considered problems a priori estimates in differential and difference interpretations are obtained, which means the uniqueness and stability of solutions by initial data and the right-hand side, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding differential problem.

Keywords: *Non-local boundary value problem, a priori estimate, difference scheme, equation of pseudoparabolic type, differential equation of fractional order, Gerasimov–Caputo fractional derivative.*

Введение

Исследованию уравнений псевдопараболического типа посвящено большое количество работ. Вопросы фильтрации жидкости в пористых средах [1], передачи тепла в гетерогенной среде [2, 3], влагопереноса в почвогрунтах [4], например, приводят (см. [5, с. 137]) к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются уравнениями в частных производных псевдопараболического типа.

В настоящее время стало очевидным, что при решении многих задач в физике и биологии часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы, примерами которых могут служить полимерные материалы [6] и сильно пористые среды [7]. К первым работам по теории дифференциальных уравнений дробного порядка следует отнести работы L. O'Shaughnessy, S. Mandelbrojt [8, 9]. При решении таких задач возникла необходимость изучения краевых задач для дифференциальных уравнений с дробной производной [10, 11]. В монографиях [12, 13] дан достаточно полный обзор работ, посвященных дифференциальным уравнениям дробного порядка. Монография [12] посвящена качественно новым свойствам операторов дробного интегро-дифференцирования и их применению к дифференциальным уравнениям дробного порядка. Уравнениям переноса в средах с фрактальной геометрией посвящены ряд интересных работ [14, 15].

В работе [16] предложены и исследованы математические модели водного режима в почвогрунтах с фрактальной структурой. В основе этих моделей лежат дифференциальные уравнения псевдопараболического типа с дробной по времени производной.

Численным методам решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка посвящены работы [17–19]. В работе [17] получены результаты, позволяющие применять метод энергетических неравенств для получения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках, как и в классическом случае ($\alpha = 1$).

В работе А.И. Кожанова [20] рассматривается нелокальная краевая задача для уравнения

$$L_\nu(u) \equiv u_t - u_{xx} - \nu u_{xxt} + c(x,t)u = q(x,t),$$

удовлетворяющее условиям:

$$u(0,t) = \alpha(t)u(1,t) + \int_0^t h(t,\tau)u(1,\tau)\,d\tau, \quad 0 < t < T, \tag{0.1}$$

$$u_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1.$$

Заметим, что в одной из рассматриваемой нами в данной работе нелокальной задаче содержится нелокальное граничное условие интегрального вида (0.1).

Следует отметить, что при переходе от трехмерного псевдопараболического уравнения

$$\partial_{0t}^\alpha u = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{0.2}$$

где

$$Lu = \sum_{s=1}^{3} L_s u, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

$$L_s u = \frac{\partial}{\partial x_s}\left(k_s(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) + \partial_{0t}^\alpha \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\eta_s(x)\frac{\partial u}{\partial x_s}\right) + h_s(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_s} - q_s(x,t)u,$$

к цилиндрической системе координат (r,φ,z) в случае, когда решение $u = u(r)$ не зависит ни от z, ни от φ (имеет место осевая симметрия), уравнение (0.2) принимает вид (обозначим $x = r$) (см. [21, с. 15; 22, с. 433])

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{r}\big(rk(r,t)u_r\big)_r + \frac{1}{r}\partial_{0t}^\alpha\big(r\eta(r)u_r\big)_r + h(r,t)u_r - q(r,t)u + f(r,t), \tag{0.3}$$

а в случае сферической симметрии уравнение (0.2) принимает вид

$$\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{r^2}\big(r^2k(r,t)u_r\big)_r + \frac{1}{r^2}\partial_{0t}^{\alpha}\big(r^2\eta(r)u_r\big)_r + h(r,t)u_r - q(r,t)u + f(r,t), \qquad (0.4)$$

где

$$k(r,t) = k_1(x,t) = k_2(x,t) = k_3(x,t), \qquad \eta(r) = \eta_1(x) = \eta_2(x) = \eta_3(x),$$

$$h(r,t) = h_1(x,t) = h_2(x,t) = h_3(x,t), \qquad q(r,t) = q_1(x,t) = q_2(x,t) = q_3(x,t)$$

суть условия симметрии на коэффициенты в силу симметрии r относительно переменных x_1, x_2, x_3.

В настоящей работе методом конечных разностей исследуются нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка по времени с оператором Бесселя (0.3), (0.4). Эти исследования являются непосредственным продолжением работ автора [23–25, 31], в которых в основном были предложены разностные методы решения локальных и нелокальных краевых задач для уравнения псевдопараболического типа.

1. Постановка нелокальной краевой задачи А

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{x^m}\partial_{0t}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^m\eta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t),$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t \le T, \qquad (1.1)$$

$$\lim_{x\to 0} x^m\Pi(x,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \qquad (1.2)$$

$$-\Pi(l,t) = \beta(t)\int_0^l x^m u(x,t)dx - \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (1.3)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l, \qquad (1.4)$$

где

$$0 < c_0 \le k(x,t), \quad \eta(x) \le c_1, \quad |r(x,t), r_x(x,t), k_x(x,t), q(x,t), \beta(t)| \le c_2, \quad 0 \le m \le 2, \qquad (1.5)$$

$\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau$ — дробная производная в смысле Герасимова–Капуто порядка α (см. [26, 27]), где $0 < \alpha < 1$, $c_i > 0$ $(i = 0,1,2)$ — константа, $\Pi(x,t) = ku_x + \partial_{0t}^{\alpha}\big(\eta(x)u_x\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u = D_{0t}^{\alpha}u - \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}$, $D_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{ud\tau}{(t-\tau)^\alpha}$ — дробная производная в смысле Римана–Лиувилля порядка α.

При $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (1.2), равносильному в свою очередь тождеству $\Pi(x,t) = 0$ [22, с. 173], если функции $r(0,t)$, $k(0,t)$, $q(0,t)$, $f(0,t)$ конечны.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1.1)–(1.4) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям гладкости, обеспечивающим нужный порядок аппроксимации разностной схемы.

По ходу изложения будем также использовать положительные постоянные числа M_i, $i = 1, 2, \dots$, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

2. Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (1.1)–(1.4) в дифференциальной форме введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$(u,v)=\int_0^l uv\,dx, \qquad (u,u)=\|u\|_0^2,$$

где u, v — заданные на $[0,l]$ функции. Умножим уравнение (1.1) скалярно на $x^m u$:

$$\big(\partial_{0t}^\alpha u, x^m u\big)=\big(\big(x^m k u_x\big)_x, u\big)+\big(\partial_{0t}^\alpha\big(x^m\eta u_x\big)_x, u\big)+\big(ru_x, x^m u\big)-\big(qu, x^m u\big)+\big(f, x^m u\big). \quad (2.1)$$

Справедлива следующая [17]

Лемма 1. *Для любой абсолютно непрерывной на $[0,T]$ функции $\upsilon(t)$ справедливо неравенство*

$$\upsilon(t)\partial_{0t}^\alpha\upsilon(t)\geq\frac{1}{2}\partial_{0t}^\alpha\big(\upsilon^2(t)\big), \quad 0<\alpha<1.$$

Из (2.1), пользуясь неравенством Коши с ε [22, с. 111] и леммой 1, после несложных преобразований находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^\alpha\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\frac{1}{2}\int_0^l\eta(x)\partial_{0t}^\alpha\big(x^{\frac{m}{2}}u_x\big)^2dx+\int_0^l x^m k u_x^2\,dx$$
$$\leq x^m u\Pi(x,t)\big|_0^l+M_1\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2\Big)+\frac{1}{2}\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2. \quad (2.2)$$

Преобразуя первое слагаемое в правой части (2.2) с учетом (1.2), (1.3), из (2.2) находим

$$\partial_{0t}^\alpha\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\int_0^l\eta(x)\partial_{0t}^\alpha\big(x^{\frac{m}{2}}u_x\big)^2dx+\int_0^l x^m k u_x^2dx$$
$$\leq M_4\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_{W_2^1(0,l)}^2+M_5\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2+\mu^2(t)\Big), \quad (2.3)$$

где $\big\|x^{\frac{m}{2}}\big\|_{W_2^1(0,l)}^2=\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2$. Тогда, применяя к обеим частям (2.3) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получим

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_{W_2^1(0,l)}^2+D_{0t}^{-\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2$$
$$\leq M_4D_{0t}^{-\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_{W_2^1(0,l)}^2+M_6\Big(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2+\mu^2(t)\Big)+\big\|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\big\|_{W_2^1(0,l)}^2\Big). \quad (2.4)$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (2.4) воспользуемся следующей леммой [17].

Лемма 2. *Пусть неотрицательная абсолютно непрерывная функция $y(t)$ удовлетворяет для почти всех t из $[0,T]$ неравенству*

$$\partial_{0t}^\alpha y(t)\leq c_1y(t)+c_2(t), \quad 0\leq\alpha\leq 1,$$

где $c_1>0$, $c_2(t)$ — суммируемая на $[0,T]$ неотрицательная функция. Тогда

$$y(t) \le y(0)E_\alpha(c_1t^\alpha) + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(c_1t^\alpha)D_{0t}^{-\alpha}c_2(t),$$

где $E_{\alpha,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$, $E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)}$ *— функции Миттаг–Леффлера.*

С помощью леммы 2 оценим первое слагаемое в правой части (2.4). Пусть $y(t) = D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)}$, $\partial_{0t}^\alpha y(t) = \|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)}$, тогда получаем

$$D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)} \le M_7\Big(D_{0t}^{-2\alpha}\big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t)\big) + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big). \tag{2.5}$$

Так как для любой неотрицательной интегрируемой на $[0,T]$ функции $g(t)$ справедливо неравенство

$$D_{0t}^{-2\alpha}g(t) \le \frac{t^\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}D_{0t}^{-\alpha}g(t), \tag{2.6}$$

то из (2.4) с учетом (2.5), (2.6) получаем следующую искомую априорную оценку:

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 \le M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(t)\Big) + \|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big), \tag{2.7}$$

где $M > 0$ — константа, зависящая только от входных данных задачи (1.1)–(1.4), $D_{0t}^{-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ — дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка α $(0 < \alpha < 1)$.

Теорема 1. *Если* $k(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x) \in C^1[0,l]$, $r(x,t)$, $q(x,t)$, $f(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t) \in C^{2,0}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$ *и выполнены условия* (1.5), *тогда для решения* $u(x,t)$ *задачи* (1.1)–(1.4) *справедлива априорная оценка* (2.7).

3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (1.1)–(1.4) применим метод конечных разностей. Тогда на равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1)–(1.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$ (см. [22, сс. 185, 186]):

$$\begin{aligned}\overline{\varkappa}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_i = \frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x^m_{i-\frac12}a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)_x + \frac{1}{x_i^m}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\Big(x^m_{i-\frac12}\gamma_i y_{\bar{x},i}\Big)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i-\frac12}a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big) + \\ \frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i+\frac12}a_{i+1}^j y^{(\sigma)}_{x,i}\Big) - d_i^j y_i^{(\sigma)} + \varphi_i^j, \quad (x,t) \in \omega_{h,\tau},\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{(x,0)} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\big(\gamma_1 y_{x,0}\big) = \frac{\frac12 h}{m+1}\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0 + d_0 y_0^{(\sigma)}\Big) - \mu_1, \quad t \in \overline{\omega}_\tau,\ x = 0, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}-\Big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} + \Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\big(\gamma_N y_{\bar{x},N}\big)\Big) = \tilde{\beta}\sum_{i=0}^{N} x_i^m y_i^{(\sigma)}\hbar + \\ \frac12 h d_N y_N^{(\sigma)} + \frac12 h\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N - \mu_2, \quad x = N,\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad t = 0, \tag{3.4}$$

где $\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}c^{(\alpha,\sigma)}_{j-s}y_t^s$ — дискретный аналог дробной производной Герасимова–Капуто порядка α $(0 < \alpha < 1)$ [18],

$$a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha}, \quad a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha}, \quad l \geq 1,\ \sigma = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}\Big[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\Big] - \frac{1}{2}\Big[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\Big], \quad l \geq 1,$$

при $j = 0 \qquad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)},$

при $j > 0 \qquad c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)}, & s = 0, \\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)}, & 1 \leq s \leq j-1, \\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)}, & s = j, \end{cases}$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0,$$

$$a_i^j = k(x_{i-\frac{1}{2}}, t^{j+\sigma}), \qquad \gamma_i = \eta(x_{i-\frac{1}{2}}), \qquad b_i^{\pm j} = \frac{\overline{\varkappa}_i r_i^{\pm j+\sigma}}{k_i^{j+\sigma}},$$

$$\tilde{\beta} = \tilde{\varkappa}\beta^{j+\sigma}, \qquad \mu_1 = \frac{\frac{1}{2}h}{m+1}\varphi_0^j, \qquad \mu_2 = \tilde{\varkappa}\mu^{j+\sigma} + \frac{1}{2}h\varphi_N^j,$$

$$y = y_i^j = y(x_i, t_j), \qquad t^* = t^{j+\sigma}, \qquad y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j,$$

$$r_N = r(l,t) = r_N^{j+\sigma} \geq 0, \qquad r = r^+ + r^-, \qquad r_0 = r(0,t) = r_0^{j+\sigma} \leq 0,$$

$$\overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad r^+ = \frac{1}{2}(r + |r|) \geq 0, \quad r^- = \frac{1}{2}(r - |r|) \leq 0,$$

$$d_i^j = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i q_i^{j+\sigma}, & i \neq 0, N, \\ q_i^{j+\sigma}, & i = 0, N, \end{cases} \qquad \varphi_i^j = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i f_i^{j+\sigma}, & i \neq 0, N, \\ f_i^{j+\sigma}, & i = 0, N, \end{cases} \qquad \hbar = \begin{cases} \frac{1}{2}h, & i = 0, \\ h, & i \neq 0, N, \end{cases}$$

$$\varkappa_i = \frac{1}{1+R_i}, \qquad R_i = \frac{\frac{1}{2}h|r_i|\overline{\varkappa}_i}{k_{i-\frac{1}{2}}}, \qquad \varkappa_0 = \frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{2}h|r_0|}{(m+1)a_1}},$$

$$r_0 \leq 0, \qquad |r| = r^+ - r^-, \qquad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \qquad Y = \hat{y} + y, \qquad \hat{y} = y^{j+1},$$

$$\tilde{\varkappa} = 1 + \frac{\frac{1}{2}hm}{l} = \frac{1}{1 - \frac{\frac{1}{2}hm}{l}}, \qquad \varkappa_N = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}h\frac{|r_N^{j+\sigma}|}{k_{N-\frac{1}{2}}}}, \quad \text{если } r_N^{j+\sigma} \geq 0.$$

Перепишем задачу (3.1)–(3.4) в операторной форме:

$$\begin{cases} \overline{\overline{\varkappa}}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y = \overline{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)} + \overline{\delta}y + \overline{\Phi}, \\ y(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.5}$$

где

$$\overline{\overline{\varkappa}} = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i, & x \in \omega_h, \\ 1, & x = 0, l, \end{cases} \qquad \overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \qquad t^* = t^{j+\frac{1}{2}},$$

$$\overline{\Lambda}\big(t^{j+\sigma}\big)y^{(\sigma)}=\begin{cases}\tilde{\Lambda}(t^{j+\sigma})y_i^{(\sigma)}=\dfrac{\varkappa_i}{x_i^m}\Big(x^m_{i-\frac12}a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)_x+\dfrac{b^{-j}}{x_{i^m}}\Big(x^m_{i-\frac12}a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)+\\ \qquad\dfrac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i+\frac12}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x,i}\Big)-d_i^j y_i^{(\sigma)},\\ \Lambda^- y_0^{(\sigma)}=\dfrac{(m+1)\Big(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0}-\frac{\frac12 h}{m+1}d_0 y_N^{(\sigma)}\Big)}{\frac12 h},\quad x=0,\\ \Lambda^+ y_N^{(\sigma)}=-\dfrac{\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N}+\tilde{\beta}\sum\limits_{i=0}^{N}y_i^{(\sigma)}\hbar+\frac12 h d_N y_N^{(\sigma)}}{\frac12 h},\quad x=l,\end{cases}$$

$$\overline{\delta}(t)y=\begin{cases}\delta y_i=\dfrac{1}{x_i^m}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\Big(x^m_{i-\frac12}\gamma_i y_{\bar{x},i}\Big)_x,\quad (x,t)\in\omega_{h\tau},\\ \delta^- y_0=\dfrac{m+1}{\frac12 h}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\big(\gamma_1 y_{x,0}\big),\quad x=0,\\ \delta^+ y_N=-\dfrac{1}{\frac12 h}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\big(\gamma_N y_{\bar{x},N}\big),\quad x=l,\end{cases}\qquad \overline{\Phi}=\begin{cases}\varphi=\varphi_i,\quad (x,t)\in\omega_{h\tau},\\ \varphi^-=\dfrac{(m+1)}{\frac12 h}\mu_1,\quad x=0,\\ \varphi^+=\dfrac{1}{\frac12 h}\mu_2,\quad x=l.\end{cases}$$

Введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$(u,v)=\sum_{i=1}^{N-1}u_i v_i h,\quad (u,u)=(1,u^2)=\|u\|_0^2,\quad (u,v]=\sum_{i=1}^{N}u_i v_i\hbar,\quad \|u]\|_0^2=\sum_{i=1}^{N}u_i^2\hbar.$$

Найдем теперь априорную оценку. Для этого умножим (3.5) скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$. Тогда получим

$$\Big(\overline{\overline{\varkappa}}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y,x^m y^{(\sigma)}\Big]=\Big(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},x^m y^{(\sigma)}\Big]+\Big(\overline{\delta}y,x^m y^{(\sigma)}\Big]+\Big(\overline{\Phi},x^m y^{(\sigma)}\Big].\tag{3.6}$$

Справедлива следующая [18]

Лемма 3. *Для любой функции $y(t)$, определенной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, справедливо неравенство*

$$y^{(\sigma)}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y\geq\frac12\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(y^2).$$

Оценивая суммы, входящие в (3.6), с учетом леммы 3, получаем

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2},\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac m2}y)^2\Big]+\Big(\frac{\gamma_i}{2},\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\bar{x}^{\frac m2}y_{\bar{x}})^2\Big]+\frac{1}{1+hM_1}\Big(\bar{x}^m a_i\varkappa,(y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2\Big]\\ \leq M_2\Big(\|x^{\frac m2}y^{(\sigma)}\|_0^2+\|\bar{x}^{\frac m2}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\|_0^2\Big)-\Big(d,x^m\big(y^{(\sigma)}\big)^2\Big)+\\ \Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)y_N^{(\sigma)}\Big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N}+\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_N y_{\bar{x},N})\Big)-\\ x^m_{\frac12}y_0^{(\sigma)}\Big(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0}+\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(\gamma_1 y_{x,0})\Big)+\Big(\varphi,x^m y^{(\sigma)}\Big)+\\ y_N^{(\sigma)}x_N^m\Big(\mu_2-\tilde{\beta}\sum_{i=0}^{N}x_i^m y_i^{(\sigma)}\hbar-\frac12 h d_N y_N^{(\sigma)}\Big).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Преобразуем третье, четвертое и шестое слагаемые в правой части (3.7) с учетом (3.2), (3.3):

$$\begin{aligned}
&\Big(\bar{x}_N^m - x_N^m\Big) y_N^{(\sigma)} \Big(\varkappa_N a_N y_{\bar{x}N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(\gamma_N y_{\bar{x},N})\Big) - \\
&\quad x_{\frac12}^m y_0^{(\sigma)} \Big(\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(\gamma_1 y_{x,0})\Big) + x_N^m y_N^{(\sigma)} \left(\mu_2 - \tilde{\beta}\sum_{i=0}^{N} x_i^m y_i^{(\sigma)}\hbar - \frac12 h d_N y_N^{(\sigma)}\right) \\
&\quad = \Big(\bar{x}_N^m - x_N^m\Big) y_N^{(\sigma)} \left[\mu_2 - \tilde{\beta}\sum_{i=0}^{N} x_i^m y_i^{(\sigma)}\hbar - \frac12 h d_N y_N^{(\sigma)} - \frac12 h \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N\right] + \\
&\qquad x_N^m y_N^{(\sigma)} \left[\mu_2 - \tilde{\beta}\sum_{i=0}^{N} x_i^m y_i^{(\sigma)}\hbar - \frac12 h d_N y_N^{(\sigma)}\right] - x_{\frac12}^m y_0^{(\sigma)} \left[\frac{\frac12 h}{m+1} d_0 y_0^{(\sigma)} + \frac{\frac12 h}{m+1}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 - \mu_1\right] \\
&\quad = y_N^{(\sigma)} \bar{x}_N^m \left[\mu_2 - \tilde{\beta}\sum_{i=0}^{N} x_i^m y_i^{(\sigma)}\hbar - \frac12 h d_N y_N^{(\sigma)}\right] - \frac12 h y_N^{(\sigma)} \big(\bar{x}_N^m - x_N^m\big)\Delta_{0t_{j+\sigma}} y_N - \\
&\qquad x_{\frac12}^m y_0^{(\sigma)} \left[\frac{\frac12 h}{m+1} d_0 y_0^{(\sigma)} - \mu_1\right] - \frac{\frac12 h}{m+1} x_{\frac12}^m y_0^{(\sigma)} \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0 \\
&\quad \le \bar{x}_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} - \bar{x}_N^m \tilde{\beta} y_N^{(\sigma)} \sum_{i=0}^{N} x_i^m y_i^{(\sigma)}\hbar - \frac12 h d_N \bar{x}_N^m \big(y_N^{(\sigma)}\big)^2 - x_{\frac12}^m \frac{\frac12 h}{m+1} d_0 (y_0^{(\sigma)})^2 + \\
&\qquad x_{\frac12}^m \mu_1 y_0^{(\sigma)} - \frac{h}{4}\Big(\bar{x}_N^m - x_N^m\Big)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N^2 - \frac{h}{4(m+1)} x_{\frac12}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0^2. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Учитывая (3.8), перепишем (3.7):

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(x^{\frac m2} y\Big)^2\right] + \left(\frac{\gamma_i}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(\bar{x}^{\frac m2} y_{\bar{x}}\Big)^2\right] + \frac{1}{1+hM_1}\left(\bar{x}^m a_i \varkappa, \Big(y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)^2\right] + \\
&\qquad \frac{h}{4(m+1)} x_{\frac12}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_0^2 + \frac{h}{4}\Big(\bar{x}_N^m - x_N^m\Big)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N^2 \\
&\quad \le M_2\Big(\big\|x^{\frac m2} y^{(\sigma)}\big\|_0^2 + \big\|\bar{x}^{\frac m2} y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\big\|_0^2\Big) - \Big(d, \big(x^{\frac m2} y^{(\sigma)}\big)^2\Big) - \bar{x}_N^m \tilde{\beta} y_N^{(\sigma)} \sum_{i=0}^{N} x_i^m y_i^{(\sigma)}\hbar - \\
&\qquad \frac12 h d_N \bar{x}_N^m \Big(y_N^{(\sigma)}\Big)^2 - x_{\frac12}^m \frac{\frac12 h}{m+1} d_0 \Big(y_0^{(\sigma)}\Big)^2 + \Big(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\Big) + \bar{x}_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} + x_{\frac12}^m \mu_1 y_0^{(\sigma)}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Учитывая $x_{N-\frac12}^m \ge \frac16 x_N^m$, преобразуем некоторые слагаемые в (3.9):

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\overline{\overline{\varkappa}}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}(x^{\frac m2} y)^2\right] + \frac{h}{4}\big(\bar{x}_N^m - x_N^m\big)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N^2 \\
&\qquad \ge \left(\frac{\overline{\varkappa}}{2}, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big(x^{\frac m2} y\big)^2\right) + \frac{h}{4} x_{N-\frac12}^m \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} y_N^2 \\
&\qquad \ge \frac{M_3}{2}\Big(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big(x^{\frac m2} y\big)^2\Big) + \frac{\frac12 h}{12}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(x_N^{\frac m2} y_N\Big)^2 \\
&\qquad \ge \frac{1}{12}\Big(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big(x^{\frac m2} y\big)^2\Big) + \frac{\frac12 h}{12}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\Big(x^{\frac m2} y_N\Big)^2 \\
&\qquad \ge \frac{1}{12}\Big(1, \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big(x^{\frac m2} y\big)^2\Big] \;\ge\; \frac{1}{12}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}\big\|x^{\frac m2} y\big\|_0^2, \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

где

$$M_3 = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \ m \geq 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } m \in (0,1), \ h \leq h_0 = \sqrt{\dfrac{12x^2}{m(1-m)}}, \end{cases}$$

$$\Big(d, \big(x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)}\big)^2\Big) - \bar{x}_N^m \tilde{\beta} y_N^{(\sigma)} \sum_{i=0}^{N} x_i^m y_i^{(\sigma)} \hbar - \frac{1}{2} h d_N \bar{x}_N^m \big(y_N^{(\sigma)}\big)^2 -$$
$$x_{\frac{1}{2}}^m \frac{\frac{1}{2}h}{m+1} d_0 \big(y_0^{(\sigma)}\big)^2 + \Big(\varphi, x^m y^{(\sigma)}\Big) + \bar{x}_N^m \mu_2 y_N^{(\sigma)} + x_{\frac{1}{2}}^m \mu_1 y_0^{(\sigma)}$$
$$\leq M_4 \Bigg(\big\| x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)} \big\|_0^2 + \big\| \bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \big\|_0^2 + \Big(x_{\frac{1}{2}}^{\frac{m}{2}} y_0^{(\sigma)} \Big)^2 \Bigg) + M_5 \Big(\big\| x^{\frac{m}{2}} \varphi \big\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \Big). \quad (3.11)$$

Перепишем (3.9) с учетом (3.10), (3.11):

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \big\| x^{\frac{m}{2}} y \big\|_1^2 + \big\| \bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{(\sigma)} \big\|_0^2 \leq M_6 \big\| x^{\frac{m}{2}} y^{(\sigma)} \big\|_1^2 + M_7 \Big(\big\| x^{\frac{m}{2}} \varphi \big\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \Big), \quad (3.12)$$

где $\big\| x^{\frac{m}{2}} y \big\|_1^2 = \big\| x^{\frac{m}{2}} y \big\|_0^2 + \big\| \bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}} \big\|_0^2 + \Big(x_{\frac{1}{2}}^{\frac{m}{2}} y_0 \Big)^2$.

Перепишем (3.12) в другой форме

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} \big\| x^{\frac{m}{2}} y \big\|_1^2 \leq M_8^{\sigma} \big\| x^{\frac{m}{2}} y^{j+1} \big\|_1^2 + M_9^{\sigma} \big\| x^{\frac{m}{2}} y^{j} \big\|_1^2 + M_7 \Big(\big\| x^{\frac{m}{2}} \varphi \big\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \Big). \quad (3.13)$$

Справедлива следующая

Лемма 4. *Пусть $\{p_j\}$ — последовательность, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$p_0 = 1, \qquad \overline{\sigma}^{1-\alpha} p_j = \sum_{s=1}^{j} \big(c_{s-1}^{\alpha,\sigma} - c_s^{\alpha,\sigma} \big) p_{j-s}, \quad j \geq 1,$$

тогда

$$0 < p_j < 1, \qquad \sum_{s=k}^{j} p_{j-s} c_{s-k}^{\alpha,\sigma} = \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad 1 \leq k \leq j, \quad (3.14)$$

$$\sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_s^{\alpha,\sigma} < \sum_{s=0}^{j} p_{j-s} c_s^{\alpha,\sigma} = p_0 c_0 = \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad (3.15)$$

где

$$\overline{\sigma}^{1-\alpha} = \begin{cases} \sigma^{1-\alpha}, & j = 0, \\ \dfrac{1}{2-\alpha} \Big((1+\sigma)^{2-\alpha} - \sigma^{2-\alpha} \Big) - \dfrac{1}{2} \Big(\big(1+\sigma\big)^{1-\alpha} - \sigma^{1-\alpha} \Big), & j \geq 1. \end{cases}$$

Доказательство. Следуя [28], докажем равенство (3.14). Тогда, учитывая, что $c_s < c_{s-1}$ для $s \geq 1$, получаем

$$\sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_s^{\alpha,\sigma} < \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_{s-1}^{\alpha,\sigma}, \quad (3.16)$$

где

$$\sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_{s-1}^{\alpha,\sigma} = \sum_{s=0}^{j} p_{j-s} c_{s}^{\alpha,\sigma}. \tag{3.17}$$

Из (3.16), (3.17) находим

$$\sum_{s=j}^{j} p_{j-s} c_{s-j}^{\alpha,\sigma} = p_0 c_0 = \overline{\sigma}^{1-\alpha}. \tag{3.18}$$

Учитывая (3.15), (3.18), получаем

$$\sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_{s-1}^{\alpha,\sigma} = \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \qquad \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_{s}^{\alpha,\sigma} < \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \qquad \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} (c_{s-1}^{\alpha,\sigma} - c_{s}^{\alpha,\sigma}) < \overline{\sigma}^{1-\alpha},$$

$$\sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_{s}^{\alpha,\sigma} < \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} c_{s}^{\alpha,\sigma} + p_j c_0, \qquad p_j c_0 > 0, \qquad c_0 = \overline{\sigma}^{1-\alpha}. \tag{3.19}$$

Из (3.16) находим

$$c_0 p_j = \sum_{s=1}^{j} (c_{s-1}^{\alpha,\sigma} - c_{s}^{\alpha,\sigma}) p_{j-s}.$$

Из (3.15), (3.19) получаем

$$0 < p_j c_0 < \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad 0 < p_j < 1.$$

Пусть $s = l + k - 1$, тогда с учетом (3.17) получим

$$\sum_{s=k}^{j} p_{j-s} c_{s-k}^{\alpha,\sigma} = \sum_{l=1}^{j-k+1} p_{j-k+1-l} c_{l-1}^{\alpha,\sigma} = \overline{\sigma}^{1-\alpha}, \quad 1 \le k \le j. \qquad \square$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 5. *Пусть выполнено* (3.14), *тогда для* $k = 1, 2, \ldots$ *получим*

$$\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)} \sum_{s=1}^{j} p_{j-s} s^{(k-1)\alpha} \le \frac{\overline{\sigma}^{1-\alpha} j^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}. \tag{3.20}$$

Лемма 5 доказывается аналогично [28, лемма 3.2].

Лемма 6. *Пусть* $\overrightarrow{e} = (1, 1, \ldots, 1)^{\top} \in R^j$,

$$J = 2\overline{\sigma}^{\alpha-1}\Gamma(2-\alpha)\lambda\tau^{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & p_1 & \cdots & p_{j-2} & p_{j-1} \\ 0 & 0 & \cdots & p_{j-3} & p_{j-2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{j\times j}$$

и выполнено (3.20), *тогда получим*

$$J^i = 0, \quad i \ge j,$$

$$J^k \overrightarrow{e} \le \frac{1}{\Gamma(1+k\alpha)}\Big(\big(2\lambda t_j^\alpha\big)^k, \big(2\lambda t_{j-1}^\alpha\big)^k, \dots, \big(2\lambda t_1^\alpha\big)^k\Big)^\top, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\sum_{s=0}^{i} J^s \overrightarrow{e} = \sum_{s=0}^{j-1} J^s \overrightarrow{e} \le \Big(E_\alpha\big(2\lambda t_j^\alpha\big), E_\alpha\big(2\lambda t_{j-1}^\alpha\big), \dots, E_\alpha\big(2\lambda t_1^\alpha\big)\Big)^\top, \quad i \ge j.$$

Лемма 6 доказывается аналогично [28, лемма 3.3].

Лемма 7. *Предположим, что неотрицательные последовательности y^j, φ^j $(j = 0, 1, 2, \dots)$ удовлетворяют неравенству*

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y^j \le \lambda_1 y^{j+1} + \lambda_2 y^j + \varphi^j, \quad j \ge 1,$$

где $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0$ — константы, тогда существует такое τ_0, что если $\tau \le \tau_0$, то

$$y^{j+1} \le 2\bigg(y^0 + \frac{t_j^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{0 \le j' \le j} \varphi^{j'}\bigg) E_\alpha(2\lambda t_j^\alpha), \quad 1 \le j \le j_0,$$

где $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$ — функция Миттаг–Леффлера, $\lambda = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2+2^{1-\alpha}}$.

Лемма 7 доказывается на основании лемм 4–6 аналогично [28, лемма 3.1].

На основании леммы 7 из (3.13) получаем

$$\big\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\big\|_1^2 \le M\bigg(\big\|x^{\frac{m}{2}} y^0\big\|_1^2 + \max_{0 \le j' \le j}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}} \varphi\big\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\Big)\bigg), \tag{3.21}$$

где $M > 0$ — константа, не зависящая от h и τ.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.5), *тогда существуют такие h_0 и τ_0, что если $h \le h_0 = \sqrt{\frac{12x^2}{m(1-m)}}$, $\tau \le \tau_0(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma)$, то для решения разностной задачи* (3.1)–(3.4) *справедлива априорная оценка* (3.21).

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.1)–(1.4), $y(x_i, t_j) = y_i^j$ — решение разностной задачи (3.1)–(3.4). Для оценки точности разностной схемы (3.1)–(3.4) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i, t_j)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (3.1)–(3.4), получаем задачу для функции z:

$$\overline{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_i = \frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x_{i-\frac12}^m a_i^j z_{\bar{x}_i}^{(\sigma)}\Big)_x + \frac{1}{x_i^m}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\Big(x_{i-\frac12}^m \gamma_i z_{\bar{x},i}\Big)_x + \frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x_{i-\frac12}^m a_i^j z_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\Big) +$$
$$\frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x_{i+\frac12}^m a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)}\Big) - d_i^j z_i^{(\sigma)} + \Psi_i^j, \quad (x,t) \in \omega_{h,\tau}, \tag{3.22}$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{(x,0)}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\Big(\gamma_1 z_{x,0}\Big) = \frac{\frac12 h}{m+1}\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha z_0 + d_0 z_0^{(\sigma)}\Big) - \nu_1, \quad t \in \overline{\omega}_\tau,\ x = 0, \tag{3.23}$$

$$-\Big(\varkappa_N a_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + \Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\Big(\gamma_N z_{\bar{x},N}\Big)\Big)$$

$$= \tilde{\beta} \sum_{i=0}^{N} x_i^m z_i^{(\sigma)} \hbar + \frac{1}{2} h d_N z_N^{(\sigma)} + \frac{1}{2} h \Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha} z_N - \nu_2, \quad x = N, \tag{3.24}$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad t = 0, \tag{3.25}$$

где $\|x\Psi\|_0^2 = O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\nu_1 = O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\nu_2 = O\big(h^2+\tau^2\big)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) разностной схемой (3.1)–(3.4) в классе решении $u = u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.4).

Применяя априорную оценку (3.21) к решению задачи (3.22)–(3.25), получаем неравенство

$$\big\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\big\|_1^2 \le M \max_{0\le j'\le j} \Big(\big\|x^{\frac{m}{2}} \Psi^{j'}\big\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2\Big),$$

где $M > 0$ — константа, не зависящая от h и τ. Отсюда вытекает априорная оценка

$$\big\|x z^{j+1}\big\|_1^2 \le \overline{M} \max_{0\le j'\le j} \Big(\big\|x \Psi^{j'}\big\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2\Big), \tag{3.26}$$

где $\overline{M} > 0$ — константа, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (3.26) следует сходимость решения разностной задачи (3.1)–(3.4) к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) в смысле нормы $\big\|xz^{j+1}\big\|_1^2$ на каждом слое так, что если существуют такие h_0 и τ_0, то при $h \le h_0 = \sqrt{\dfrac{12x^2}{m(1-m)}}$ и $\tau \le \tau_0(c_0, c_1, c_2, \alpha, \sigma)$ справедлива априорная оценка

$$\big\|x\big(y^{j+1} - u^{j+1}\big)\big\|_1 \le \overline{M}\big(h^2 + \tau^2\big).$$

4. Постановка нелокальной краевой задачи Б и априорная оценка в дифференциальной форме

Рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу для уравнения (1.1). Заменим условие (1.3) условием вида

$$-\Pi(l,t) = \beta(t)u(0,t) + \int_0^t \rho(t,\tau)u(0,\tau)\,d\tau - \mu(t), \quad |\beta| \le c_2. \tag{4.1}$$

Для получения априорной оценки решения умножим (1.1) скалярно на $x^m u$. Тогда, учитывая (4.1), после несложных преобразований получим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2 + \int_0^l \eta(x)\partial_{0t}^{\alpha}(x^{\frac{m}{2}}u_x)^2 dx + \big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2 \le M_5\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_{W_2^1(0,l)}^2 + M_6\int_0^t \big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_{W_2^1(0,l)}^2 +$$
$$M_7\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}f\big\|_0^2 + \mu^2(t)\Big), \tag{4.2}$$

где $\big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_{W_2^1(0,l)}^2 = \big\|x^{\frac{m}{2}}u\big\|_0^2 + \big\|x^{\frac{m}{2}}u_x\big\|_0^2$. Применяя к обеим частям (4.2) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, из (4.2) находим

$$\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{\frac{m}{2}}u_x\right\|^2_0\le M_5D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_6D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|^2_{W_2^1(0,l)}d\tau+$$
$$M_8\Big(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\left\|x^{\frac{m}{2}}f\right\|^2_0+\mu^2(t)\Big)+\left\|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\right\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big). \tag{4.3}$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (4.3) следующим образом:

$$\begin{aligned}
D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|^2_{W_2^1(0,l)}d\tau&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_0^\tau\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|^2_{W_2^1(0,l)}ds\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|^2_{W_2^1(0,l)}\int_s^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big(-\frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha}\Big|_s^t\Big)ds\\
&=\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^\alpha\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|^2_{W_2^1(0,l)}ds\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t(t-\tau)^\alpha\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|^2_{W_2^1(0,l)}d\tau\\
&\le\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{(t-\tau)\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|^2_{W_2^1(0,l)}d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\le\frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|^2_{W_2^1(0,l)}.
\end{aligned}\tag{4.4}$$

Из (4.3), учитывая (2.3)–(2.6) и (4.4), находим искомую априорную оценку

$$\left\|x^{\frac{m}{2}}u\right\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\left\|x^{\frac{m}{2}}u_x\right\|^2_0\le M\Big(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\left\|x^{\frac{m}{2}}f\right\|^2_0+\mu^2(t)\Big)+\left\|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\right\|^2_{W_2^1(0,l)}\Big), \tag{4.5}$$

где $M>0$ — константа, зависящее только от входных данных задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4).

Справедлива следующая

Теорема 3. *Если* $k(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\eta(x)\in C^1[0,l]$, $r(x,t), q(x,t), f(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t)\in C^{2,0}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\partial_{0t}^\alpha u(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$ *и выполнены условия* (1.5) *и* (4.1), *тогда для решения* $u(x,t)$ *задачи* (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) *справедлива априорная оценка* (4.5).

5. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\big(h^2+\tau^2\big)$:

$$\overline{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_i=\frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x^m_{i-\frac12}a_i^jy^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)_x+\frac{1}{x_i^m}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\Big(x^m_{i-\frac12}\gamma_iy_{\bar{x},i}\Big)_x+\frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i-\frac12}a_i^jy^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)+$$
$$\frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i+\frac12}a_{i+1}^jy^{(\sigma)}_{x,i}\Big)-d_i^jy_i^{(\sigma)}+\varphi_i^j,\quad (x,t)\in\omega_{h,\tau}, \tag{5.1}$$

$$\varkappa_0a_1y^{(\sigma)}_{x,0}+\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\big(\gamma_1y_{x,0}\big)=\frac{\frac12h}{m+1}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0+\frac{\frac12h}{m+1}d_0^jy_0^{(\sigma)}-\mu_1,\quad t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=0, \tag{5.2}$$

$$-\Big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} + \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_N y_{\bar{x},N}\Big)\Big)$$
$$= \tilde{\beta} y^{(\sigma)}_0 + \sum_{s=0}^{j-\frac{1}{2}} \rho_s^{j+\frac{1}{2}} y_0^{(\sigma),s} \bar{\tau} + \frac{1}{2} h d_N y^{(\sigma)}_N + \frac{1}{2} h \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N - \mu_2, \quad x = N, \tag{5.3}$$
$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad t = 0, \tag{5.4}$$

Перепишем задачу (5.1)–(5.4) в операторной форме:

$$\begin{cases} \overline{\overline{\varkappa}} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \overline{\Lambda}(t^{j+\sigma}) y^{(\sigma)} + \overline{\delta} y + \overline{\Phi}, \\ y(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{5.5}$$

где

$$\overline{\overline{\varkappa}} = \begin{cases} \overline{\varkappa}_i, \ x \in \omega_h, \\ 1, \quad x = \{0, l\}, \end{cases} \qquad \overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24 x_i^2}, \ t^* = t^{j+1/2},$$

$$\overline{\Lambda}(t^{j+\sigma}) y^{(\sigma)} = \begin{cases} \tilde{\Lambda}(t^{j+\sigma}) y^{(\sigma)}_i = \dfrac{\varkappa_i}{x_i^m}\Big(x^m_{i-\frac{1}{2}} a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)_x + \dfrac{b^{-j}}{x_i{}^m}\Big(x^m_{i-\frac{1}{2}} a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big) + \\ \qquad \dfrac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i+\frac{1}{2}} a^j_{i+1} y^{(\sigma)}_{x,i}\Big) - d^j_i y^{(\sigma)}_i, \\ \Lambda^- y^{(\sigma)}_0 = \dfrac{(m+1)\Big(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} - \frac{\frac{1}{2}h}{m+1} d_0 y^{(\sigma)}_0\Big)}{\frac{1}{2}h}, \quad x = 0, \\ \Lambda^+ y^{(\sigma)}_N = -\dfrac{\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} + \tilde{\beta} y^{(\sigma)}_0 + \sum\limits_{s=0}^{j-\frac{1}{2}} \rho_s^{j+\frac{1}{2}} y_0^{(\sigma),s} \bar{\tau} + \frac{1}{2} h d_N y^{(\sigma)}_N}{\frac{1}{2}h}, \quad x = l, \end{cases}$$

$$\overline{\delta}(t) y = \begin{cases} \delta y_i = \dfrac{1}{x_i^m} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(x^m_{i-\frac{1}{2}} \gamma_i y_{\bar{x},i}\Big)_x, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ \delta^- y_0 = \dfrac{m+1}{\frac{1}{2}h} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_1 y_{x,0}\Big), \quad x = 0, \\ \delta^+ y_N = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}h} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_N y_{\bar{x},N}\Big), \quad x = l, \end{cases} \qquad \overline{\Phi} = \begin{cases} \varphi = \varphi_i, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ \varphi^- = \dfrac{(m+1)}{\frac{1}{2}h}\mu_1, \ x = 0, \\ \varphi^+ = \frac{1}{\frac{1}{2}h}\mu_2, \quad x = l. \end{cases}$$

Введем скалярное произведение и норму в следующем виде:

$$\Big(u, v\Big] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i \hbar, \qquad \big\|u\big\|_0^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \hbar, \qquad \hbar = \begin{cases} \dfrac{1}{2} h, \quad i = N, \\ h, \quad i \neq N. \end{cases}$$

Умножим (5.5) теперь скалярно на $x^m y^{(\sigma)}$, тогда получим

$$\Big(\overline{\overline{\varkappa}} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y, x^m y^{(\sigma)}\Big] = \Big(\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, x^m y^{(\sigma)}\Big] + \Big(\overline{\delta} y, x^m y^{(\sigma)}\Big] + \Big(\overline{\Phi}, x^m y^{(\sigma)}\Big]. \tag{5.6}$$

Из (5.6) после нетрудных преобразований получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big\|^2_1+\big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\big\|^2_0$$

$$\leq M_1\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}\big\|^2_1+M_2\sum_{s=0}^{j}\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big\|^2_{W^1_2(0,l)}\bar{\tau}+M_3\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|^2_0+\mu_1^2+\mu_2^2\Big),\quad (5.7)$$

где

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big\|^2_1=\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big\|^2_0+\big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}\big\|^2_0+\Big(x^{\frac{m}{2}}_{\frac{1}{2}}y_0\Big)^2,\qquad \big\|x^{\frac{m}{2}}y\big\|^2_{W^1_2(0,l)}=\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big\|^2_0+\big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}\big\|^2_0.$$

Обозначая через $F=M_2\sum_{s=0}^{j}\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big\|^2_{W^1_2(0,l)}\bar{\tau}+M_3\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|^2_0+\mu_1^2+\mu_2^2\Big)$ и повторяя рассуждения (3.13)–(3.21), из (5.7) получим

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\big\|^2_1\leq M_4\left(\big\|x^{\frac{m}{2}}y^0\big\|^2_1+\max_{0\leq j'\leq j}\left(\sum_{s=0}^{j}\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big\|^2_{W^1_2(0,l)}\bar{\tau}+\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|^2_0+\mu_1^2+\mu_2^2\right)\right).\quad (5.8)$$

Введя обозначение $g^j=\max\limits_{0\leq j'\leq j}\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big\|^2_{W^1_2(0,l)}$, с учетом $\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big\|^2_{W^1_2(0,l)}=\big\|x^{\frac{m}{2}}y\big\|^2_0+\big\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}\big\|^2_0$ из (5.8) получим

$$g^{j+1}\leq M_5\sum_{s=0}^{j}g^s\tau+M_{12}F_1^j,\quad (5.9)$$

где

$$F_1^j=\big\|x^{\frac{m}{2}}y^0\big\|^2_1+\frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\leq j'\leq j}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\big\|^2_0+\mu_1^2+\mu_2^2\Big).$$

На основании [29, с. 171, лемма 4] из (5.9) получаем искомую априорную оценку

$$\big\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}\big\|^2_{W^1_2(0,l)}\leq M\left(\big\|x^{\frac{m}{2}}y^0\big\|^2_1+\frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\leq j'\leq j}\Big(\big\|x^{\frac{m}{2}}\varphi^{j'}\big\|^2_0+\mu_1^2+\mu_2^2\Big)\right),\quad (5.10)$$

где $M>0$, не зависящая от h и τ.

Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (1.5) *и* (4.1) *тогда существуют такие* h_0 *и* τ_0, *что если* $h\leq h_0=\sqrt{\frac{12x^2}{m(1-m)}}$ *и* $\tau\leq\tau_0(c_0,c_1,c_2,\alpha,\sigma)$, *то для решения разностной задачи* (5.1)–(5.4) *справедлива априорная оценка* (5.10).

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ — решение разностной задачи (5.1)–(5.4). Для оценки точности разностной схемы (5.1)–(5.4) рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения (5.1)–(5.4), получаем задачу для функции z:

$$\overline{\varkappa}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_i=\frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x^m_{i-\frac{1}{2}}a_i^jz^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)_x+\frac{1}{x_i^m}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\Big(x^m_{i-\frac{1}{2}}\gamma_iz_{\bar{x},i}\Big)_x+\frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i-\frac{1}{2}}a_i^jz^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)+$$

$$\frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i+\frac12}a^j_{i+1}z^{(\sigma)}_{x,i}\Big)-d_i^jz_i^{(\sigma)}+\Psi_i^j,\quad (x,t)\in\omega_{h,\tau},\tag{5.11}$$

$$\varkappa_0a_1z^{(\sigma)}_{x,0}+\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_1z_{x,0}\Big)=\frac{\frac12h}{m+1}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}z_0+\frac{\frac12h}{m+1}d_0^jz_0^{(\sigma)}-\nu_1,\quad t\in\overline{\omega}_\tau,\ x=0,\tag{5.12}$$

$$-\Big(\varkappa_Na_Nz^{(\sigma)}_{\bar x,N}+\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\Big(\gamma_Nz_{\bar x,N}\Big)\Big)=\tilde\beta z_0^{(\sigma)}+\sum_{s=0}^{j-\frac12}\rho_s^{j+\frac12}z_0^{(\sigma),s}\bar\tau+\frac12hd_Nz_N^{(\sigma)}+$$
$$\frac12h\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}z_N-\nu_2,\quad x=N,\tag{5.13}$$

$$z(x,0)=0,\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad t=0,\tag{5.14}$$

где $\|x\Psi\|_0^2=O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\nu_1=O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\nu_2=O\big(h^2+\tau^2\big)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) разностной схемой (5.1)–(5.4) в классе решении $u=u(x,t)$ задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4).

Применяя априорную оценку (5.10) к решению задачи (5.11)–(5.14), получаем неравенство

$$\big\|x^{\frac m2}z^{j+1}\big\|^2_{W_2^1(0,l)}\le M\max_{0\le j'\le j}\Big(\big\|x^{\frac m2}\Psi^{j'}\big\|_0^2+\nu_1^2+\nu_2^2\Big),\tag{5.15}$$

где $M>0$ — константа, не зависящая от h и τ.

Отсюда вытекает априорная оценка

$$\big\|xz^{j+1}\big\|^2_{W_2^1(0,l)}\le \overline{M}\max_{0\le j'\le j}\Big(\big\|x\Psi^{j'}\big\|_0^2+\nu_1^2+\nu_2^2\Big),\tag{5.16}$$

где $\overline{M}>0$ — константа, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (5.16) следует сходимость решения разностной задачи (5.1)–(5.4) к решению дифференциальной задачи (1.1), (1.2), (4.1), (1.4) в смысле нормы $\|xz^{j+1}\|^2_{W_2^1(0,l)}$ на каждом слое так, что если существуют такие τ_0 и h_0, то при $h\le h_0=\sqrt{\dfrac{12x^2}{m(1-m)}}$ и $\tau\le\tau_0(c_0,c_1,c_2,\alpha,\sigma)$ справедлива априорная оценка

$$\big\|x\big(y^{j+1}-u^{j+1}\big)\big\|^2_{W_2^1(0,l)}\le\overline{M}\big(h^2+\tau^2\big).$$

Замечание. Полученные в данной работе результаты справедливы и в случае, когда условие (1.3) заменяется условием вида

$$\partial^\alpha_{0t}\int_0^l x^mu(x,t)\,dx=\mu(t),\quad 0\le t\le T.$$

6. Алгоритмы численного решения рассматриваемых задач

Для численного решения разностных схем (3.1)–(3.4) и (5.1)–(5.4) приведем их к расчетному виду. Для начала рассмотрим разностную схему (3.1)–(3.4). Тогда уравнение (3.1) приводится к следующему виду:

$$A_iy^{j+1}_{i-1}-C_iy_i^{j+1}+B_iy^{j+1}_{i+1}=-F_i^j,\quad i=\overline{1,N-1},\tag{6.1}$$

где

$$A_i = \left(\tau\sigma\varkappa_i^j a_i^j + \gamma_i \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} - \tau h \sigma b_i^{-j} a_i^j\right) x_{i-\frac{1}{2}}^m,$$

$$B_i = \left(\tau\sigma\varkappa_i^j a_{i+1}^j + \gamma_{i+1} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau h \sigma b_i^{+j} a_{i+1}^j\right) x_{i+\frac{1}{2}}^m,$$

$$C_i = A_i + B_i + x_i^m \overline{\varkappa}_i h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + x_i^m \sigma \tau h^2 d_i^j,$$

$$\begin{aligned} F_i^j = {} & AA_i y_{i-1}^j - CC_i y_i^j + BB_i y_{i+1}^j + x_i^m h^2 \tau \varphi_i^j - \\ & x_i^m \overline{\varkappa}_i h^2 \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} (y_i^{s+1} - y_i^s) + \\ & \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \Big(\big(\gamma_{i+1} y_{i+1}\big)^{s+1} - \big(\gamma_{i+1} y_{i+1}\big)^s \Big) - \\ & \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \Big(\big((\gamma_i + \gamma_{i+1}) y_i\big)^{s+1} - \big((\gamma_i + \gamma_{i+1}) y_i\big)^s \Big) + \\ & \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \Big(\big(\gamma_i y_{i-1}\big)^{s+1} - \big(\gamma_i y_{i-1}\big)^s \Big), \end{aligned}$$

$$AA_i = \left(\tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_i^j - \gamma_i \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} - \tau h (1-\sigma) b_i^{-j} a_i^j\right) x_{i-\frac{1}{2}}^m,$$

$$BB_i = \left(\tau(1-\sigma)\varkappa_i^j a_{i+1}^j - \gamma_{i+1} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \tau h (1-\sigma) b_i^{+j} a_{i+1}^j\right) x_{i+\frac{1}{2}}^m,$$

$$CC_i = AA_i + BB_i - x_i^m \overline{\varkappa}_i h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + x_i^m (1-\sigma) \tau h^2 d_i^j.$$

Краевое условие (3.2) принимает вид

$$y_0^{j+1} = \varkappa_1 y_1^{j+1} + \widetilde{\mu}_1, \tag{6.2}$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{\tau\sigma\varkappa_0 a_1 + \gamma_1 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}}{\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j + \gamma_1 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)(m+1)} + \frac{\frac{1}{2}\sigma\tau h^2 d_0^j}{m+1}},$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_1 = \Bigg[& \mu_1 h \tau + \tau(1-\sigma)\varkappa_0 a_1 (y_1^j - y_0^j) - \gamma_1 \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} (y_1^j - y_0^j) + \\ & \frac{\frac{1}{2} h^2}{(m+1)} \frac{\tau^{1-\alpha} c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)} y_0 - \frac{\frac{1}{2} h^2}{m+1} \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} (y_0^{s+1} - y_0^s) + \\ & \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)(m+1)} \sum_{s=0}^{j-1} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} \Big(\big(\gamma_1 y_1\big)^{s+1} - \big(\gamma_1 y_1\big)^s \Big) - \frac{\frac{1}{2}(1-\sigma)\tau h^2 d_0^j y_0^j}{m+1} - \end{aligned}$$

$$\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)(m+1)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\Big(\big(\gamma_1 y_0\big)^{s+1}-\big(\gamma_1 y_0\big)^{s}\Big)\Big]\Big/$$
$$\Big[\tau\sigma\varkappa_0 a_1^j+\gamma_1\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{1}{2}h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)(m+1)}+\frac{0.5\sigma\tau h^2 d_0^j}{m+1}\Big].$$

Краевое условие (3.3) принимает вид

$$y_N^{j+1}=\varkappa_2 y_{N-1}^{j+1}+\varkappa_3 y_{N-2}^{j+1}+\varkappa_4 y_{N-3}^{j+1}+\dots+\varkappa_{N+1}y_0^{j+1}+\widetilde{\mu}_2, \tag{6.3}$$

где

$$\varkappa_2=\frac{\tau\sigma\varkappa_N a_N+\gamma_N\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}-\sigma\tau h^2\widetilde{\varkappa}\beta x_{N-1}^m}{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j+\gamma_N\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{1}{2}h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{1}{2}\sigma\tau h^2 d_N^j+\frac{1}{2}\sigma\tau h^2\widetilde{\varkappa}\beta x_N^m},$$

$$\varkappa_i=\frac{\sigma\tau h^2\widetilde{\varkappa}\beta x_{N-i+1}^m}{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j+\gamma_N\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{1}{2}h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{1}{2}\sigma\tau h^2 d_N^j+\frac{1}{2}\sigma\tau h^2\widetilde{\varkappa}\beta x_N^m},\quad i=\overline{3,N},$$

$$\varkappa_{N+1}=\frac{\frac{1}{2}\sigma\tau h^2\widetilde{\varkappa}\beta x_0^m}{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j+\gamma_N\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{1}{2}h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{1}{2}\sigma\tau h^2 d_N^j+\frac{1}{2}\sigma\tau h^2\widetilde{\varkappa}\beta x_N^m},$$

$$\widetilde{\mu}_2=\Big[\mu_2 h\tau-\tau(1-\sigma)\varkappa_N a_N(y_N^j-y_{N-1}^j)-\frac{1}{2}(1-\sigma)\tau h^2 d_N^j y_N^j-$$
$$(1-\sigma)\tau h\widetilde{\varkappa}\beta\sum_{i=0}^{N}x_i^m y_i\hbar+\gamma_N\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}(y_N^j-y_{N-1}^j)+\frac{1}{2}h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}y_N-$$
$$\frac{1}{2}h^2\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_N^{s+1}-y_N^s)-\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\Big(\big(\gamma_N y_N\big)^{s+1}-\big(\gamma_N y_N\big)^{s}\Big)+$$
$$\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\Big(\big(\gamma_N y_{N-1}\big)^{s+1}-\big(\gamma_N y_{N-1}\big)^{s}\Big)\Big]\Big/$$
$$\Big[\tau\sigma\varkappa_N a_N^j+\gamma_N\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{1}{2}h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{1}{2}\sigma\tau h^2 d_N^j+\frac{1}{2}\sigma\tau h^2\widetilde{\varkappa}\beta x_N^m\Big].$$

Для решения (6.1)–(6.3) применяется метод окаймления [30]. Разностная схема (3.1)–(3.4) таким образом приводится к двум трехдиагональным системам линейных алгебраических уравнений, решение каждой из которой легко находится известным методом прогонки.

Рассмотрим теперь разностную схему (5.1)–(5.4). Тогда краевое условие (5.3) принимает вид

$$y_N^{j+1}=\varkappa_2 y_{N-1}^{j+1}+\varkappa_3 y_0^{j+1}+\widetilde{\mu}_2, \tag{6.4}$$

где

$$\varkappa_2=\frac{\tau\sigma\varkappa_N a_N+\gamma_N\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}}{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j+\gamma_N\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{1}{2}h^2\widetilde{\varkappa}\Big(\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\sigma\tau d_N^j\Big)},$$

$$\varkappa_3=-\frac{\tau\sigma h\widetilde{\varkappa}\beta+\frac{1}{2}\tau^2h\widetilde{\varkappa}\rho_{j+1}^{j+\frac{1}{2}}}{\tau\sigma\varkappa_N a_N^j+\gamma_N\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{1}{2}h^2\widetilde{\varkappa}\Big(\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\sigma\tau d_N^j\Big)},$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}_2=\Bigg[&\mu_2h\tau-\tau(1-\sigma)\varkappa_N a_N(y_N^j-y_{N-1}^j)-\frac{1}{2}\widetilde{\varkappa}(1-\sigma)\tau h^2d_N^jy_N^j-\widetilde{\varkappa}(1-\sigma)\tau h\widetilde{\beta}y_0^j+\\&\gamma_N\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}(y_N^j-y_{N-1}^j)+\frac{1}{2}h^2\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}y_N-\\&\frac{1}{2}h^2\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}(y_N^{s+1}-y_N^s)-\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\Big(\big(\gamma_Ny_N\big)^{s+1}-\big(\gamma_Ny_N\big)^s\Big)+\\&\tau h\widetilde{\varkappa}\sum_{s=1}^{j-1}\rho_s^jy_0^s\tau+(1-\sigma)\tau^2h\widetilde{\varkappa}\rho_0^{j+\frac{1}{2}}y_0^0+\\&\sigma\tau^2h\widetilde{\varkappa}\rho_j^{j+\frac{1}{2}}y_0^j+\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}\Big(\big(\gamma_Ny_{N-1}\big)^{s+1}-\big(\gamma_Ny_{N-1}\big)^s\Big)\Bigg]\Big/\\&\Bigg[\tau\sigma\varkappa_Na_N^j+\gamma_N\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{1}{2}h^2\widetilde{\varkappa}\Big(\frac{\tau^{1-\alpha}c_0^{(\alpha,\sigma)}}{\Gamma(2-\alpha)}+\sigma\tau d_N^j\Big)\Bigg].\end{aligned}$$

Разностная схема (5.1)–(5.4) с учетом (6.1), (6.2), (6.4) как и выше методом окаймления приводится к двум трехдиагональным системам линейных алгебраических уравнений, решение каждой из которых легко находится известным методом прогонки.

7. Результаты численного эксперимента

Тестовый пример 1. Рассмотрим задачу (1.1)–(1.4), где

$$k(x,t)=e^{x+t},\quad \eta(x)=e^x,\quad r(x,t)=\Big(x-\frac{1}{2}\Big)(x+t),\quad q=xt^2,$$

$$\begin{aligned}f(x,t)=x^4\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}-4t^3e^{x+t}(x^3+3x^2)-4e^x(x^3+3x^2)\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}-\\4t^3x^3\Big(x-\frac{1}{2}\Big)(x+t)-4me^{x+t}x^2t^3-4me^xx^2\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+t^5x^5,\end{aligned}$$

$$\beta=e^{l+t},\quad \mu=e^{l+t}t^3\frac{l^{m+5}}{m+5}+4l^3t^3e^{l+t}+4e^ll^3\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)},\quad u_0(x)=0,\quad l=1,\ T=1.$$

Точное решение задачи $u(x,t)=t^3x^4$.

Тестовый пример 2. Рассмотрим задачу (1.1), (1.2), (4.1), (1.4), где

$$\mu(t)=e^{l+l^{m+2}+t}t^3(m+2)l^{m+1}+\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}e^{l+l^{m+2}}(m+2)l^{m+1}+t^3\cos(l+t)+\frac{t^7}{5},$$

$$f(x,t)=\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}e^{x^{m+2}}-e^{x+x^{m+2}+t}t^3(m+2)\Big((2m+1)x^m+\big(1+(m+2)x^{m+1}\big)x^{m+1}\Big)-$$

$$\frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} e^{x+x^{m+2}}(m+2)\Big((2m+1)x^m + \big(1+(m+2)x^{m+1}\big)x^{m+1}\Big) -$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+t)t^3(m+2)x^{m+1}e^{x^{m+2}} + xt^5 e^{x^{m+2}}, \quad \rho(t,\tau) = t^2\tau, \quad \beta = \cos(l+t).$$

Точное решение задачи $u(x,t) = t^3 e^{x^{m+2}}$.

На тестовых примерах 1 и 2 при различных значениях $\alpha = 0.01; 0.5; 0.99$, $m = 0; 0.5; 1; 1.5; 2$ и уменьшении размера сетки были исследованы максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости (ПС) в нормах $|[\cdot]|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max_{(x_i,t_j)\in\bar{w}_{h\tau}} |y|$, когда $h = \tau$. Полученные результаты показывают, что погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$. Порядок сходимости определяется по следующей формуле:

$$\text{ПС} = \log_{\frac{h_1}{h_2}} \frac{|[z_1]|_0}{|[z_2]|_0} = \frac{\ln\left(\frac{|[z_1]|_0}{|[z_2]|_0}\right)}{\ln\left(\frac{|[N_2]|_0}{|[N_1]|_0}\right)},$$

где z_i — это погрешность, соответствующая h_i.

Литература

1. **Дзекцер Е.С.** Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 220, № 3. — С. 540–543.
2. **Рубинштейн Л.И.** К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. — 1948. — Т. 12, № 1. — С. 27–45.
3. **Ting T.W.** A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction // J. Math. Anal. Appl. — 1974. — Vol. 45, № 9. — P. 23–31.
4. **Hallaire M.** Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de desséchement // L'eau et la production vegetale. — Paris: INRA, 1964. — P. 27–62.
5. **Чудновский А.Ф.** Теплофизика почв. — М.: Наука, 1976.
6. **Бэгли Р.Л., Товик П.Дж.** Дифференциальное исчисление, основанное на производных дробного порядка — новый подход к расчету конструкций с вязко-упругим демпфированием // Аэрокосмическая техника. — 1984. — Т. 2, № 2. — С. 84–93.
7. **Динариев О.Ю.** Фильтрация в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1990. — Т. 5. — С. 66–70.
8. **O'Shaughnessy L.** Problem 433 // Amer. Math. Month. — 1918. — Vol. 25. — P. 172–173.
9. **Mandelbrojt S.** Sulla generalizzazione del calcolo clelle variazione // Atti Reale Accad. Naz. Lincei. Rend Cl. sei., fis. mat. e natur. Ser. 6. — 1925. — Vol. 1. — P. 151–156.
10. **Мальшаков А.В.** Уравнения гидродинамики для пористых сред со структурой порового пространства, обладающей фрактальной геометрией // ИФЖ. — 1992. — Т. 62, № 3. — С. 405–410.
11. **Шефер Д., Кефер К.** Фракталы в физике // Тр. 6-го Междунар. симпоз. по фракталам в физике, 9-12 июня 1985 г. — Италия, Триест: МЦТФ, 1988. — С. 62–71.
12. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск, 1987.
13. **Нахушев А. М.** Элементы дробного исчисления и их применения. — Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2000.

14. **Чукбар К.В.** Стохастический перенос и дробные производные // ЖЭТФ. — 1995. — Т. 108, № 5(11). — С. 1875–1884.

15. **Кочубей А.Н.** Диффузия дробного порядка // Дифф. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 4. — С. 660–670.

16. **Беданокова С.Ю.** Уравнение движения почвенной влаги и математическая модель влагосодержания почвенного слоя, основанная на уравнении Аллера // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. — 2007. — Т. 4. — С. 68–71.

17. **Алиханов А.А.** Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифф. уравнения. — 2010. — Т. 46, № 5. — С. 660–666.

18. **Alikhanov A.A.** A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. of Computational Physics. — 2015. — Vol. 280. — P. 424–438.

19. **Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х.** Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2006. — Т. 46, № 10. — С. 1871–1881.

20. **Кожанов А.И.** Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера. // Дифф. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 6. — С. 763–774.

21. **Веницианов Е.В., Рубинштейн Р.Н.** Динамика сорбции из жидких сред. — М.: Наука, 1983.

22. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.

23. **Бештоков М.Х.** О численном решении нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения // Дифф. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 10. — С. 1393–1406.

24. **Бештоков М.Х.** Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2016. — Т. 56, № 10. — С. 1780–1794.

25. **Бештоков М.Х.** Локальные и нелокальные краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Римана–Лиувилля // Дифф. уравнения — 2018. — Т. 54, № 6. — С. 763–778.

26. **Caputo H.** Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent II // Geophys J. Royal Astronom. Soc. — 1967. — Vol. 13. — P. 529–539.

27. **Герасимов А.Н.** Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // Прикладная математика и механика. — 1948. — Т. 12. — С. 251–260.

28. **Li D., Liao H.-L., Sun W., Wang J., and Zhang J.** Analysis of L1-Galerkin FEMs for time-fractional nonlinear parabolic problems // Commun. Comput. Phys. — 2018. — Vol. 24, № 1. — P. 86–109.

29. **Самарский А.А., Гулин А.В.** Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973.

30. **Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1960.

31. **Бештоков М.Х.** Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2017. — Т. 57, № 12. — С. 2021–2041.

Поступила в редакцию 31 мая 2018 г.
После исправления 4 июня 2019 г.
Принята к печати 16 апреля 2020 г.

Литература в транслитерации

1. **Dzektser E.S.** Uravneniya dvizheniya podzemnyh vod so svobodnoi poverhnost'yu v mnogosloinyh sredah // Dokl. AN SSSR. — 1975. — T. 220, № 3. — S. 540–543.
2. **Rubinshtein L.I.** K voprosu o protsesse rasprostraneniya tepla v geterogennyh sredah // Izv. AN SSSR. Ser. geogr. i geofiz. — 1948. — T. 12, № 1. — S. 27–45.
3. **Ting T.W.** A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction // J. Math. Anal. Appl. — 1974. — Vol. 45, № 9. — P. 23–31.
4. **Hallaire M.** Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de desséchement // L'eau et la production vegetale. — Paris: INRA, 1964. — P. 27–62.
5. **Chudnovskii A.F.** Teplofizika pochv. — M.: Nauka, 1976.
6. **Begli R.L., Tovik P.Dzh.** Differentsial'noe ischislenie, osnovannoe na proizvodnyh drobnogo poryadka — novyi podhod k raschetu konstruktsii s vyazko-uprugim dempfirovaniem // Aerokosmicheskaya tekhnika. — 1984. — T. 2, № 2. — S. 84–93.
7. **Dinariev O.Yu.** Fil'tratsiya v treschinovatoi srede s fraktal'noi geometriei treschin // Izv. AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza. — 1990. — T. 5. — S. 66–70.
8. **O'Shaughnessy L.** Problem 433 // Amer. Math. Month. — 1918. — Vol. 25. — P. 172–173.
9. **Mandelbrojt S.** Sulla generalizzazione del calcolo clelle variazione // Atti Reale Accad. Naz. Lincei. Rend Cl. sei., fis. mat. e natur. Ser. 6. — 1925. — Vol. 1. — P. 151–156.
10. **Mal'shakov A.B.** Uravneniya gidrodinamiki dlya poristyh sred so strukturoi porovogo prostranstva, obladayuschei fraktal'noi geometriei // IFZh. — 1992. — T. 62, № 3. — S. 405–410.
11. **Shefer D., Kefer K.** Fraktaly v fizike // Tr. 6-go Mezhdunar. simpoz. po fraktalam v fizike, 9-12 iyunya 1985 g. — Italiya, Triest: MTSTF, 1988. — S. 62–71.
12. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.** Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya. — Minsk, 1987.
13. **Nahushev A. M.** Elementy drobnogo ischisleniya i ih primeneniya. — Nal'chik: NII PMA KBNTS RAN, 2000.
14. **Chukbar K.V.** Stohasticheskii perenos i drobnye proizvodnye // ZhETF. — 1995. — T. 108, № 5(11). — S. 1875–1884.
15. **Kochubei A.N.** Diffuziya drobnogo poryadka // Diff. uravneniya. — 1990. — T. 26, № 4. — S. 660–670.
16. **Bedanokova S.YU.** Uravnenie dvizheniya pochvennoi vlagi i matematicheskaya model' vlagosoderzhaniya pochvennogo sloya, osnovannaya na uravnenii Allera // Vestnik Adygeiskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 4: Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki. — 2007. — T. 4. — S. 68–71.
17. **Alihanov A.A.** Apriornye otsenki reshenii kraevyh zadach dlya uravnenii drobnogo poryadka // Diff. uravneniya. — 2010. — T. 46, № 5. — S. 660–666.
18. **Alikhanov A.A.** A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. of Computational Physics. — 2015. — Vol. 280. — P. 424–438.
19. **Taukenova F.I., Shkhanukov-Lafishev M.H.** Raznostnye metody resheniya kraevyh zadach dlya differentsial'nyh uravnenii drobnogo poryadka // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2006. — T. 46, № 10. — S. 1871–1881.
20. **Kozhanov A.I.** Ob odnoi nelokal'noi kraevoi zadache s peremennymi koeffitsientami dlya uravnenii teploprovodnosti i Allera. // Diff. uravneniya. — 2004. — T. 40, № 6. — S. 763–774.
21. **Venitsianov E.V., Rubinshtein R.N.** Dinamika sorbtsii iz zhidkih sred. — M.: Nauka, 1983.
22. **Samarskii A.A.** Teoriya raznostnyh skhem. — M.: Nauka, 1977.

23. **Beshtokov M.H.** O chislennom reshenii nelokal'noi kraevoi zadachi dlya vyrozhdayuschegosya psevdoparabolicheskogo uravneniya // Diff. uravneniya. — 2016. — T. 52, № 10. — S. 1393–1406.

24. **Beshtokov M.H.** Raznostnyi metod resheniya nelokal'noi kraevoi zadachi dlya vyrozhdayuschegosya psevdoparabolicheskogo uravneniya tret'ego poryadka s peremennymi koeffitsientami // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki — 2016. — T. 56, № 10. — S. 1780–1794.

25. **Beshtokov M.H.** Lokal'nye i nelokal'nye kraevye zadachi dlya vyrozhdayuschihsya i nevyrozhdayuschihsya psevdoparabolicheskih uravnenii s drobnoi proizvodnoi Rimana–Liuvillya // Diff. uravneniya — 2018. — T. 54, № 6. — S. 763–778.

26. **Caputo H.** Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent II // Geophys J. Royal Astronom. Soc. — 1967. — Vol. 13. — P. 529–539.

27. **Gerasimov A.N.** Obobschenie lineinyh zakonov deformatsii i ih prilozhenie k zadacham vnutrennego treniya // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 1948. — T. 12. — S. 251–260.

28. **Li D., Liao H.-L., Sun W., Wang J., and Zhang J.** Analysis of L1-Galerkin FEMs for time-fractional nonlinear parabolic problems // Commun. Comput. Phys. — 2018. — Vol. 24, № 1. — P. 86–109.

29. **Samarskii A.A., Gulin A.V.** Ustoichivost' raznostnyh skhem. — M.: Nauka, 1973.

30. **Faddeev D.K., Faddeeva V.N.** Vychislitel'nye metody lineinoi algebry. — M.: Fizmatgiz, 1960.

31. **Beshtokov M.H.** Differencial'nye i raznostnye kraevye zadachi dlya nagruzhennyh psevdoparabolicheskih uravnenij tret'ego poryadka i raznostnye metody ih chislennoj realizacii // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2017. — T. 57, № 12. — S. 2021–2041.