УДК 519.853.2 + 519.632

Функционалы чувствительности в вариационных неравенствах механики и их приложение к схемам двойственности*

Э.М. Вихтенко[1], Н.Н. Максимова[2], Р.В. Намм[3]

[1]Тихоокеанский государственный университет, ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск, 680035

[2]Амурский государственный университет, Игнатьевское шоссе, 21, Благовещенск, 675027

[3]Вычислительный центр ДВО РАН, ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск, 680000

E-mails: Vikhtenko@mail.khstu.ru (Вихтенко Э.М.), knnamursu@mail.ru (Максимова Н.Н.), namm@mail.khstu.ru (Намм Р.В.)

Вихтенко Э.М., Максимова Н.Н., Намм Р.В. Функционалы чувствительности в вариационных неравенствах механики и их приложение к схемах двойственности // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 1. — С. 43–52.

Исследованы характеристические свойства функционала чувствительности в вариационных неравенствах механики на примере скалярной задачи Синьорини. Рассмотрены приложения функционалов чувствительности в схемах двойственности.

Ключевые слова: *скалярная задача Синьорини, схема двойственности, модифицированный функционал Лагранжа, функционал чувствительности.*

Vikhtenko E.M., Maksimova N.N., Namm R.V. A sensitivity functionals in variational inequalities of mechanics and their application to duality schemes // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 1. — P. 43–52.

Characteristic properties of a sensitivity functional in the variational inequalities mechanics on an example of a scalar Signorini problem are investigated. Applications of sensitivity functionals in duality schemes are considered.

Key words: *scalar Signorini problem, duality scheme, modified Lagrangian functional, sensitivity functional.*

Введение

Функции чувствительности играют большую роль при исследовании схем двойственности, основанных на модифицированных функциях Лагранжа в конечномерных задачах оптимизации [1–4]. Их характеристические свойства во многом являются решающими при исследовании сходимости методов двойственности. Аналогичная картина наблюдается и в бесконечномерных вариационных неравенствах механики, в которых исследование функционалов чувствительности существенно опирается на свойства следов функций на границе области.

*Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (госконтракт № 02.740.11.0626) и при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 11-01-98513-р_восток_а, № 12-01-90807-мол_рф_нр).

В работе обосновывается слабая полунепрерывность снизу функционала чувствительности в скалярной задаче Синьорини. Исследуется метод двойственности, основанный на модифицированных функционалах Лагранжа.

1. Функционал чувствительности

Рассмотрим скалярную задачу Синьорини:

$$\begin{cases} J(v) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2 \, d\Omega - \int_\Omega f\, v \, d\Omega \to \min, \\ v \in K = \left\{ w \in W_2^1(\Omega): \ -\gamma w \le 0 \text{ на } \Gamma \right\}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\Omega \subset R^n$ $(n = 2, 3)$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ, $f \in L_2(\Omega)$ — заданная функция, $\gamma v \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ — след функции $v \in W_2^1(\Omega)$ на Γ.

Так как функционал $J(v)$ не является сильно выпуклым на $W_2^1(\Omega)$, то задача (1) может не иметь решения. Однако если выполнено условие

$$\int_\Omega f \, d\Omega < 0, \tag{2}$$

то для $v \in K$ выполняется условие $J(v) \to +\infty$ при $\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \to \infty$, и поэтому задача (1) разрешима. Более того, условие (2) обеспечивает единственность решения задачи (1). Ниже везде будем предполагать, что (2) выполнено.

Для упрощения дальнейшего изложения при обозначении следов функций на границе области будем опускать символ оператора следа γ.

Для любого $m \in L_2(\Gamma)$ введем множество

$$K_m = \left\{ v \in W_2^1(\Omega): \ -v \le m \text{ на } \Gamma \right\}$$

и определим для функций $m \in L_2(\Gamma)$ функционал чувствительности

$$\chi(m) = \inf_{v \in K_m} J(v). \tag{3}$$

Нетрудно заметить, что если функция $m \in L_2(\Gamma)$ ограничена снизу на Γ, то соответствующее множество K_m не является пустым. Множество K_m может быть пустым, если $m \in L_2(\Gamma) \backslash W_2^{1/2}(\Gamma)$ и не ограничена снизу на Γ (см. [5, 6]). Если $K_m = \varnothing$, то по определению полагаем $\chi(m) = +\infty$. Тогда $\chi(m)$ является собственным выпуклым функционалом на $L_2(\Gamma)$, но его эффективная область $\mathrm{dom}\chi = \{m \in L_2(\Gamma)\colon \chi(m) < +\infty\}$ не совпадает с $L_2(\Gamma)$. Заметим, что $\mathrm{dom}\chi$ является выпуклым, но не замкнутым множеством. При этом $\overline{\mathrm{dom}\chi} = L_2(\Gamma)$.

В опубликованных ранее работах [7–9] это обстоятельство не учитывалось и подразумевалось, что эффективная область функционала чувствительности совпадает со всем $L_2(\Gamma)$. В данной работе эта неточность исправлена. Все теоремы о сходимости методов двойственности, рассмотренные в ранее опубликованных работах, остаются в силе.

Пусть $\overline{m} \in \mathrm{dom}\chi$ и $u_{\overline{m}} \in W_2^1(\Omega)$ — решение задачи

$$\begin{cases} J(v) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2\, d\Omega - \int_\Omega f\, v\, d\Omega \to \min, \\ v \in K_{\overline{m}} = \left\{ w \in W_2^1(\Omega) :\ -w \le \overline{m} \text{ на } \Gamma \right\}, \end{cases} \tag{4}$$

тогда $\chi(\overline{m}) = J(u_{\overline{m}})$.

Теорема 1. *Пусть* $\overline{m} \notin \mathrm{dom}\chi$. *Тогда для любой последовательности* $\{m_i\} \subset \mathrm{dom}\chi$, *такой, что* $\lim_{i\to\infty} \|m_i - \overline{m}\|_{L_2(\Gamma)} = 0$, *справедливо* $\lim_{i\to\infty} \chi(m_i) = +\infty$.

Доказательство. Возьмем функцию $\overline{m}$, не принадлежащую $\mathrm{dom}\chi$, и рассмотрим произвольную последовательность $\{m_i\} \subset \mathrm{dom}\chi$, такую, что

$$\lim_{i\to\infty} \|m_i - \overline{m}\|_{L_2(\Gamma)} = 0.$$

Обозначим $v_i = \arg\min_{v\in K_{m_i}} J(v)$. Покажем, что $\lim_{i\to\infty} \|v_i\|_{W_2^1(\Omega)} = +\infty$. Допустим противное, т. е., что существует подпоследовательность $\{v_{i_j}\}$ и постоянная $C > 0$ такие, что $\|v_{i_j}\|_{W_2^1(\Omega)} \le C\ \forall\, i_j$. Так как $W_2^1(\Omega) \subset W_2^{1/2}(\Gamma)$, то $\|v_{i_j}\|_{W_2^{1/2}(\Gamma)} \le C_1$, $C_1 > 0$ — константа и, кроме того, $\left\{v_{i_j}\right\}$ является компактной последовательностью в $L_2(\Gamma)$. Пусть $\hat{v} \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ есть ее слабая предельная точка. Не ограничивая общности, можно считать, что $\hat{v}$ есть слабый предел $\left\{v_{i_j}\right\}$ в $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Тогда $\left\{v_{i_j}\right\}$ сильно сходится к $\hat{v}$ в $L_2(\Gamma)$ и одновременно $-v_{i_j} \le m_{i_j}$ на Γ. Поэтому $-\hat{v} \le \overline{m}$ на Γ, что означает $K_{\overline{m}} \ne \emptyset$. Полученное противоречие доказывает, что $\lim_{i\to\infty} \|v_i\|_{W_2^1(\Omega)} = +\infty$.

Обозначим $\overline{v}_i = \frac{1}{\mathrm{mes}\Gamma}\int_\Gamma v_i\, d\Gamma$. Так как $-v_i \le m_i$ на Γ, то $-\overline{v}_i \le \frac{1}{\mathrm{mes}\Gamma}\int_\Gamma m_i\, d\Gamma$. Имеем

$$\left| \int_\Gamma m_i\, d\Gamma \right| \le (\mathrm{mes}\Gamma)^{1/2} \|m_i\|_{L_2(\Gamma)},$$

$$-(\mathrm{mes}\Gamma)^{1/2} \|m_i\|_{L_2(\Gamma)} \le \int_\Gamma m_i\, d\Gamma \le (\mathrm{mes}\Gamma)^{1/2} \|m_i\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Следовательно,

$$-\overline{v}_i \le (\mathrm{mes}\Gamma)^{-1/2} \|m_i\|_{L_2(\Gamma)}, \quad i = 1, 2, \dots .$$

Так как $\lim_{i\to\infty} \|m_i - \overline{m}\|_{L_2(\Gamma)} = 0$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших i имеет место

$$\|m_i\|_{L_2(\Gamma)} \le \|\overline{m}\|_{L_2(\Gamma)} + \varepsilon.$$

Это означает, что

$$-\overline{v}_i \le (\mathrm{mes}\Gamma)^{-1/2} \left(\|\overline{m}\|_{L_2(\Gamma)} + \varepsilon \right) \le C_2, \quad C_2 = \mathrm{const} > 0. \tag{5}$$

Воспользуемся представлением $v_i = \overline{v}_i + \widetilde{v}_i$. Тогда имеем

$$\chi(m_i) = J(v_i) = J(\widetilde{v}_i + \overline{v}_i) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \widetilde{v}_i|^2\, d\Omega - \int_\Omega f\, (\widetilde{v}_i + \overline{v}_i)\, d\Omega$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \widetilde{v}_i|^2\, d\Omega - \int_\Omega f\, \widetilde{v}_i\, d\Omega - \overline{v}_i \int_\Omega f\, d\Omega. \tag{6}$$

Для функции $\widetilde{v}_i$ выполняется $\int_\Gamma \widetilde{v}_i\, d\Gamma = 0$. Тогда (см. [11, с. 73]) существует постоянная $\widetilde{\gamma} > 0$, не зависящая от $\widetilde{v}_i$, такая, что

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla \widetilde{v}_i|^2 \, d\Omega \geq \widetilde{\gamma} \, \|\widetilde{v}_i\|^2_{W_2^1(\Omega)} \, .$$

Отсюда и из (6) следует оценка

$$\chi(m_i) \geq \frac{\widetilde{\gamma}}{2} \|\widetilde{v}_i)\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\widetilde{v}_i\|_{W_2^1(\Omega)} - \overline{v}_i \int\limits_{\Omega} f \, d\Omega. \tag{7}$$

Так как $\|v_i\|_{W_2^1(\Omega)} \to \infty$ при $i \to \infty$, то хотя бы одна из величин $\|\widetilde{v}_i\|_{W_2^1(\Omega)}$, $\|\overline{v}_i\|_{W_2^1(\Omega)}$ стремится к бесконечности. С учетом неравенств (2), (5), (7) это означает, что $J(v_i) \to +\infty$ при $i \to +\infty$ или

$$\lim_{i\to\infty} \chi(m_i) = +\infty. \tag{8}$$

□

Теорема 2. *Пусть* $\overline{m} \in \mathrm{dom}\chi$. *Тогда для любой последовательности* $\{m_k\} \subset \mathrm{dom}\chi$, *сходящейся к* $\overline{m}$ *в* $L_2(\Gamma)$, *имеет место* $\underline{\lim}_{k\to\infty} \chi(m_k) \geq \chi(\overline{m})$.

Доказательство. Имеем $\{m_k\} \subset \mathrm{dom}\chi$ и $\lim_{k\to\infty} \|m_k - \overline{m}\|_{L_2(\Gamma)} = 0$. Из последовательности $\{m_k\}$ выделим подпоследовательность $\{m_{k_i}\}$, для которой

$$\lim_{i\to\infty} \chi(m_{k_i}) = \underline{\lim}_{k\to\infty} \chi(m_k).$$

Рассмотрим подпоследовательность $\left\{u_{m_{k_i}}\right\}$, где $u_{m_{k_i}} = \arg\min_{v \in K_{m_{k_i}}} J(v)$. Из формул (5) и (7) вытекает, что $\left\{u_{m_{k_i}}\right\}$ является ограниченной последовательностью в $W_2^1(\Omega)$ (иначе $\lim_{i\to\infty} \chi(m_{k_i}) = +\infty$ и теорема доказана). Так как $W_2^1(\Omega) \subset W_2^{1/2}(\Gamma)$, то $\left\{u_{m_{k_i}}\right\}$ ограничена и в $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Тем самым получаем, что последовательность $\left\{u_{m_{k_i}}\right\}$ слабо компактна в $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Пусть $\overline{u}$ — ее слабая предельная точка. Не ограничивая общности, будем считать, что $\left\{u_{m_{k_i}}\right\}$ является слабо сходящейся последовательностью, т. е. $\overline{u}$ есть слабый предел $\left\{u_{m_{k_i}}\right\}$. Так как $W_2^{1/2}(\Gamma)$ компактно вкладывается в $L_2(\Gamma)$ и $L_2(\Gamma) \subset W_2^{-1/2}(\Gamma)$, то $\left\{u_{m_{k_i}}\right\}$ сходится в $L_2(\Gamma)$ к $\overline{u}$. Имеем $m_{k_i} \to \overline{m}$ в $L_2(\Gamma)$, $u_{m_{k_i}} \to \overline{u}$ в $L_2(\Gamma)$ и $-u_{m_{k_i}} \leq m_{k_i}$ на Γ. Тогда $-\overline{u} \leq \overline{m}$ на Γ. Обозначим $\hat{u} = \arg\min_{-v=\overline{u} \text{ на } \Gamma} J(v)$. Имеем

$$J(u_{m_{k_i}}) - J(\hat{u}) = \int\limits_{\Omega} \nabla \hat{u} \cdot \nabla (u_{m_{k_i}} - \hat{u}) \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} f (u_{m_{k_i}} - \hat{u}) \, d\Omega +$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla (u_{m_{k_i}} - \hat{u})|^2 d\Omega = < \mu, u_{m_{k_i}} - \hat{u} > + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla (u_{m_{k_i}} - \hat{u})|^2 d\Omega,$$

где

$$< \mu, v > = \int\limits_{\Omega} \nabla \hat{u} \cdot \nabla v \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} f \, v \, d\Omega,$$

и при этом $\mu \in W_2^{-1/2}(\Gamma)$ (см. [5, 10]).

Так как $\{u_{m_{k_i}}\}$ слабо сходится к $\overline{u}$ в $W_2^{1/2}(\Gamma)$, то

$$\lim_{i\to\infty} < \mu, u_{m_{k_i}} - \hat{u} >= 0.$$

Поэтому

$$\varliminf_{i\to\infty} J(u_{m_{k_i}}) \geq J(\hat{u}) \geq \chi(\overline{u})$$

или

$$\varliminf_{i\to\infty} \chi(m_{k_i}) \geq \chi(\overline{u}) \geq \chi(\overline{m}). \qquad \square$$

Из теорем 1 и 2 вытекает полунепрерывность снизу функционала $\chi(m)$ на $L_2(\Gamma)$, а с учетом выпуклости функционала — и его слабая полунепрерывность снизу на $L_2(\Gamma)$.

2. О сходимости метода двойственности

Для произвольного фиксированного $l \in L_2(\Gamma)$ рассмотрим функционал

$$F(m) = \chi(m) + \int\limits_\Gamma l\, m\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma m^2\, d\Gamma, \quad r = \mathrm{const} > 0.$$

Функционал $F(m)$ играет большую роль при исследовании методов двойственности, основанных на модифицированных функционалах Лагранжа [7–9].

Теорема 3. *Функционал $F(m)$ является коэрцитивным в $L_2(\Gamma)$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{m_k\} \subset \mathrm{dom}\chi$, такую, что $\|m_k\|_{L_2(\Gamma)} \to +\infty$. Как и ранее, обозначим

$$v_{m_k} = \arg\min_{-v\leq m_k} J(v).$$

Для функции $v \in W_2^1(\Omega)$ построим функции $\overline{v} = (1/\mathrm{mes}\Gamma)\int_\Gamma v\, d\Gamma$ и $\widetilde{v} = v - \overline{v}$. Повторяя аналогичные рассуждения, что и в теореме 1, получим оценку

$$\chi(m_k) = J(v_{m_k}) \geq \frac{\widetilde{\gamma}}{2}\|\widetilde{v}_{m_k}\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \|f\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{v}_{m_k}\|_{W_2^1(\Omega)} - \frac{1}{\mathrm{mes}\,\Gamma}\int\limits_\Gamma v_{m_k}\, d\Gamma \int\limits_\Omega f\, d\Omega.$$

Так как $-\int_\Gamma v_{m_k}\, d\Gamma \leq \int_\Gamma m_k\, d\Gamma$, то, с учетом (2), получаем

$$-\int\limits_\Gamma v_{m_k}\, d\Gamma \int\limits_\Omega f\, d\Omega \geq \int\limits_\Gamma m_k\, d\Gamma \int\limits_\Omega f\, d\Omega.$$

Тем самым

$$\chi(m_k) \geq \frac{\widetilde{\gamma}}{2}\|\widetilde{v}_{m_k}\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \|f\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{v}_{m_k}\|_{W_2^1(\Omega)} + \frac{1}{\mathrm{mes}\,\Gamma}\int\limits_\Gamma m_k\, d\Gamma \int\limits_\Omega f\, d\Omega.$$

Поэтому

$$F(m_k) \geq \frac{\widetilde{\gamma}}{2}\|\widetilde{v}_{m_k}\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \|f\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{v}_{m_k}\|_{W_2^1(\Omega)} + \frac{1}{\operatorname{mes}\Gamma}\int\limits_\Gamma m_k\, d\Gamma \int\limits_\Omega f\, d\Omega +$$
$$\int\limits_\Gamma l\, m_k\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma m_k^2\, d\Gamma. \qquad \square$$

Теорема 4. *Для любого $l \in L_2(\Gamma)$ существует единственный элемент*

$$\mu(l) = \arg\min_{m\in L_2(\Gamma)} F(m).$$

Доказательство. Существование $\mu(l)$ следует из теорем 1 и 2. Единственность вытекает из неравенства

$$F((1-\lambda)m_1 + \lambda m_2) \leq (1-\lambda)F(m_1) + \lambda F(m_2) - \frac{r}{2}(1-\lambda)\lambda\,\|m_1 - m_2\|^2_{L_2(\Gamma)}$$
$$\forall\ m_1, m_2 \in \operatorname{dom}\chi,\ \ \forall\lambda \in (0,1). \qquad \square$$

Рассмотрим двойственный функционал [7, 8]:

$$\varphi(l) = \inf_{m\in L_2(\Gamma)} F(m).$$

Теорема 5. *Функционал $\varphi(l)$ дифференцируем по Гато на $L_2(\Gamma)$ и его производная $\nabla\varphi(l)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $1/r$, т. е.*

$$\|\nabla\varphi(l_1) - \nabla\varphi(l_2)\|_{L_2(\Gamma)} \leq \frac{1}{r}\|l_1 - l_2\|_{L_2(\Gamma)}.$$

Доказательство. Для любого $\mu \in L_2(\Gamma)$ имеем

$$\chi(\mu(l)) + \int\limits_\Gamma l\mu(l)\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma \mu^2(l)\, d\Gamma + \frac{r}{2}\|\mu - \mu(l)\|^2_{L_2(\Gamma)} \leq \chi(\mu) + \int\limits_\Gamma l\mu\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma \mu^2\, d\Gamma.$$

Возьмем два элемента: $l_1, l_2 \in L_2(\Gamma)$. Пусть $\mu_1 = \mu(l_1)$, $\mu_2 = \mu(l_2)$. Тогда из последнего неравенства следуют неравенства:

$$\begin{aligned}
&\chi(\mu_1) + \int\limits_\Gamma l_1\mu_1\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma \mu_1^2\, d\Gamma + \frac{r}{2}\|\mu_2 - \mu_1\|^2_{L_2(\Gamma)} \leq \chi(\mu_2) + \int\limits_\Gamma l_1\mu_2\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma \mu_2^2\, d\Gamma,\\
&\chi(\mu_2) + \int\limits_\Gamma l_2\,\mu_2\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma \mu_2^2\, d\Gamma + \frac{r}{2}\|\mu_1 - \mu_2\|^2_{L_2(\Gamma)} \leq \chi(\mu_1) + \int\limits_\Gamma l_2\mu_1\, d\Gamma + \frac{r}{2}\int\limits_\Gamma \mu_1^2\, d\Gamma.
\end{aligned} \tag{9}$$

Складывая их, получаем

$$r\,\|\mu_1 - \mu_2\|^2_{L_2(\Gamma)} \leq \int\limits_\Gamma (l_1 - l_2)(\mu_2 - \mu_1)\, d\Gamma \tag{10}$$

или

$$\|\mu_1 - \mu_2\|_{L_2(\Gamma)} \leq \frac{1}{r}\|l_1 - l_2\|_{L_2(\Gamma)}. \tag{11}$$

Из неравенств (9) также вытекает

$$\int\limits_{\Gamma} l_2(\mu_2-\mu_1)\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma}(\mu_2^2-\mu_1^2)\,d\Gamma\le\chi(\mu_1)-\chi(\mu_2)\le\int\limits_{\Gamma} l_1(\mu_2-\mu_1)\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma}(\mu_2^2-\mu_1^2)\,d\Gamma.$$

Устремим l_2 к l_1 в $L_2(\Gamma)$. Тогда из неравенства (11) следует

$$\lim_{l_2\to l_1}\chi(\mu_2)=\chi(\mu_1).$$

Тем самым двойственный функционал $\varphi(l)$ непрерывен в $L_2(\Gamma)$. Из непрерывности вогнутого функционала $\varphi(l)$ вытекает, что субдифференциал $\partial(-\varphi(l))$ выпуклого функционала $(-\varphi(l))$ не является пустым для любого $l\in L_2(\Gamma)$. Пусть $(-t)\in\partial(-\varphi(l))$, тогда для любого $\xi\in L_2(\Gamma)$ имеем

$$\varphi(\xi)\le\varphi(l)+\langle t,\xi-l\rangle\,, \tag{12}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$.

Из (12) следует, что

$$\chi(\mu(\xi))+\int\limits_{\Gamma}\xi\mu(\xi)\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma}\mu^2(\xi)d\Gamma\le\chi(\mu(l))+\int\limits_{\Gamma} l\,\mu(l)\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma}\mu^2(l)\,d\Gamma+\langle t,\,\xi-l\rangle$$
$$\le\chi(\mu(\xi))+\int\limits_{\Gamma} l\,\mu(\xi)\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_{\Gamma}\mu^2(\xi)\,d\Gamma+\langle t,\xi-l\rangle\,.$$

Откуда вытекает, что

$$\int\limits_{\Gamma}\mu(\xi)\,(\xi-l)\,d\Gamma\le\langle t,\,\xi-l\rangle\ \ \forall\,\xi\in L_2(\Gamma).$$

Для произвольных $h\in L_2(\Gamma)$ и $\forall\,\beta>0$ положим $\xi=l+\beta h$. Тогда имеем

$$\int\limits_{\Gamma}\mu(l+\beta h)\,h\,d\Gamma\le\langle t,h\rangle\ \ \forall h\in L_2(\Gamma),\qquad\int\limits_{\Gamma}\mu(l+\beta h)\,h\,d\Gamma=\langle t,h\rangle\ \ \forall h\in L_2(\Gamma).$$

Устремляя β к нулю и учитывая (11), получим

$$\int\limits_{\Gamma}\mu(l)\,h\,d\Gamma=\langle t,h\rangle\ \ \forall\,h\in L_2(\Gamma). \tag{13}$$

Отсюда, в силу единственности элемента $\mu(l)$, следует, что $\varphi(l)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\Gamma)$ и $\nabla\varphi(l)=t$ (см. [12]). Из (11) и (13) имеем

$$\langle\nabla\varphi(l_1)-\nabla\varphi(l_2),h\rangle=\int\limits_{\Gamma}(\mu(l_1)-\mu(l_2))\,h\,d\Gamma\le\|\mu(l_1)-\mu(l_2)\|_{L_2(\Gamma)}\,\|h\|_{L_2(\Gamma)}\,.$$

Следовательно,

$$\|\nabla\varphi(l_1)-\nabla\varphi(l_2)\|_{L_2(\Gamma)}\le\frac{1}{r}\|l_1-l_2\|_{L_2(\Gamma)}\,. \qquad \square$$

Рассмотрим двойственную задачу

$$\begin{cases} \varphi(l) \to \max, \\ l \in L_2(\Gamma). \end{cases} \tag{14}$$

Пусть решение u задачи (1) принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$. Тогда задача (14) имеет единственное решение $\partial u/\partial n \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ (см. [7]), где n — вектор единичной внешней нормали к границе Γ области Ω.

Для решения задачи (14) рассмотрим итерационный метод

$$l^{k+1} = l^k + r\mu(l^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (l^0 \in L_2(\Gamma)), \tag{15}$$

где

$$\mu(l^k) = \arg \min_{m \in L_2(\Gamma)} \left\{ \chi(m) + \int\limits_\Gamma l^k\, m\, d\Gamma + \frac{r}{2} \int\limits_\Gamma m^2\, d\Gamma \right\}, \quad r = \text{const} > 0.$$

Теорема 6. *Отображение* $P(l) = l + r\mu(l)$ *удовлетворяет условиям* [8, *теорема* 3]:
а) $P\,(\partial u/\partial n) = \partial u/\partial n$,
б) $\|P\,(\partial u/\partial n) - P\,(l)\|_{L_2(\Gamma)} \le \|\partial u/\partial n - l\|_{L_2(\Gamma)} \quad \forall\, l \ne \partial u/\partial n$.

Теорема 7. *Для алгоритма* (15) *имеет место предельное равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \mu(l^k) \right\|_{L_2(\Gamma)} = 0.$$

Доказательство. Из теоремы 5 следует, что для любого $h \in L_2(\Gamma)$ справедливо равенство [13]:

$$\varphi(l + h) - \varphi(l) = \int\limits_0^1 \langle \mu(l + t\,h), h \rangle\, dt.$$

Отсюда по аналогии с [14, с. 31] следует утверждение теоремы. □

Градиентный метод (15) можно обобщить на случай переменного шага сдвига по двойственной переменной, а именно рассмотреть метод (см. [3, 8]):

$$l^{k+1} = l^k + \beta_k \mu(l^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \ (l^0 \in L_2(\Gamma)), \tag{16}$$

где $\beta_k \in [\beta, 2r - \beta]$, $\beta \in (0, r]$.

Для метода (16) справедливы [8, теоремы 5 и 6].

На основе итерационного метода (16) строится следующий алгоритм решения исходной задачи (1) [8]:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad u^{k+1} = \arg \min_{v \in W_2^1(\Omega)} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int\limits_\Gamma \left\{ \left(\left(l^k - r\,v \right)^+ \right)^2 - \left(l^k \right)^2 \right\} d\Gamma \right\}, \quad l^0 \in L_2(\Gamma), \\ &\text{(ii)} \quad l^{k+1} = l^k + \beta_k \max \left\{ -u^{k+1} - \frac{l^k}{r} \right\}, \quad \beta_k \in [\beta, 2r - \beta], \quad \beta \in (0, r]. \end{aligned} \tag{17}$$

Алгоритм (17) сходится по функционалу, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} J(u^k) = \min_{v \in K} J(v) = J(u),$$

где, как и ранее, u — решение задачи (1).

Действительно, $\chi(m)$ — слабо полунепрерывный снизу на $L_2(\Gamma)$ функционал. Поэтому

$$\varliminf_{k\to\infty}\left\{\chi(\mu(l^k))+\int\limits_\Gamma l^k\,\mu(l^k)\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_\Gamma\mu^2(l^k)\,d\Gamma\right\}=\varliminf_{k\to\infty}\chi(\mu(l^k))\geq\chi(0)=J(u).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\varphi(l^k)&=\chi(\mu(l^k))+\int\limits_\Gamma l^k\,\mu(l^k)\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_\Gamma\mu^2(l^k)\,d\Gamma\\&=\inf_{\mu\in L_2(\Gamma))}\left\{\chi(\mu)+\int\limits_\Gamma l^k\,\mu\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_\Gamma\mu^2\,d\Gamma\right\}\leq\chi(0),\quad k=0,1,2,\ldots.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\varlimsup_{k\to\infty}\left\{\chi(\mu(l^k))+\int\limits_\Gamma l^k\,\mu(l^k)\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_\Gamma\mu^2(l^k)\,d\Gamma\right\}\leq\chi(0).$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\chi(\mu(l^k))+\int\limits_\Gamma l^k\,\mu(l^k)\,d\Gamma+\frac{r}{2}\int\limits_\Gamma\mu^2(l^k)\,d\Gamma\right\}=\chi(0)=J(u).$$

Из теоремы 7 теперь следует

$$\lim_{k\to\infty}J(u^k)=\lim_{k\to\infty}\chi(\mu(l^k))=\chi(0)=J(u).$$

Исследование сходимости алгоритма по аргументу проведено в работах [7–9].

Литература

1. **Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.** Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — М.: Наука, 1989.
2. **Бертсекас Д.** Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. — М.: Радио и связь, 1987.
3. **Гроссман К., Каплан А.А.** Нелинейное программирование на основе безусловной оптимизации. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981.
4. **Антипин А.С., Голиков А.И., Хорошилова Е.В.** Функция чувствительности, ее свойства и приложения // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2011. — Т. 51, № 12. — С. 2126–2142.
5. **Хлуднев А.М.** Задачи теории упругости в негладких областях. — М.: Физматлит, 2010.
6. **Mclean W.** Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. — Cambridge, United Kingdom: University Press, 2000.
7. **Ву Г., Намм Р.В., Сачков С.А.** Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2006. — Т. 46, № 1. — С. 26–36.
8. **Вихтенко Э.М., Ву Г., Намм Р.В.** О сходимости метода Удзавы с модифицированным функционалом Лагранжа в вариационных неравенствах механики // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 8. — С. 1357–1366.

9. **Кушнирук Н.Н., Намм Р.В.** Метод множителей Лагранжа для решения полукоэрцитивной модельной задачи с трением // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2009.— Т. 12, № 4.— С. 409–420.
10. **Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я.** Решение вариационное неравенств в механике.— М.: Мир, 1986.
11. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике.— М.: Наука, 1980.
12. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы.— М.: Мир, 1979.
13. **Канторович Л.В., Акилов Г.Г.** Функциональный анализ.— СПб.: Невский диалект, 2004.
14. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию.— М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 23 октября 2012 г.,
в окончательном варианте 3 апреля 2013 г.