

УДК 539.375

## ДОСТАТОЧНЫЙ ДИСКРЕТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ ОТРЫВЕ

В. М. Корнев, В. Д. Кургузов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Моделируется поведение атомной структуры в окрестности вершины трещины. Изучается потеря устойчивости и закритическое деформирование трехатомной ячейки в плотноупакованном слое атомов при растяжении. Для макротрещин в монокристаллах введено понятие обобщенного вектора Бюргера. Предложен достаточный дискретно-интегральный критерий прочности для трещин нормального отрыва, когда поля напряжений имеют сингулярную составляющую. При формулировке указанного критерия в соответствии с гибридной моделью В. В. Новожилова используется новый класс решений, который отличается от решений, применяемых при формулировке классического достаточного критерия прочности. Предложенный достаточный критерий допускает предельный переход к необходимому критерию, когда в пределе можно пренебречь энергетическими характеристиками закритического деформирования ячейки. Величины критических нагрузок, полученные в соответствии с достаточным критерием, существенно отличаются от полученных в соответствии с необходимым критерием, что позволяет описать эффект Ребиндера.

**Введение.** При исследовании прочности и разрушения твердых тел все большее значение придается подходам, связанным с дискретным строением материала. В. В. Новожилов, рассматривая разрушение идеального кристаллического твердого тела с трещиной как дискретный процесс [1], для оценки прочности хрупкого упругого тела в окрестности сингулярных точек поля напряжений предложил осреднять последние в пределах межатомного расстояния и сравнивать их с теоретической прочностью на разрыв. Кроме того, он ввел необходимый и достаточный критерии хрупкой прочности [1]. Реальные кристаллы содержат дефекты, наиболее распространенными среди которых являются вакансии. В работе [2] предложены дискретно-интегральные критерии для трех простейших типов трещин (по терминологии В. В. Новожилова, это необходимые критерии). Аналогичный подход развит и для сложного напряженно-деформированного состояния при пропорциональном нагружении [3], причем пределы осреднения напряжений зависят от наличия, размеров и положения дефектов в окрестности вершины трещины. В работах [4, 5] подход В. В. Новожилова использован для получения достаточных критериев для трещин нормального отрыва. Показано, что если величину раскрытия трещины определять с использованием реальных потенциалов межатомного взаимодействия для цепочек атомов, то величина теоретической прочности кристаллического тела не зависит от конкретного кристаллического строения твердого тела в окрестности вершины трещины.

Для необходимых критериев соответствующие осредненные напряжения не превосходят теоретических прочностей на разрыв или сдвиг. При выполнении необходимого критерия ближайшая к вершине кристаллическая структура находится в критическом состоянии. Однако после исчерпания несущей способности ближайшей к вершине кристаллической структуры возможно дополнительное догружение тела с трещиной за счет

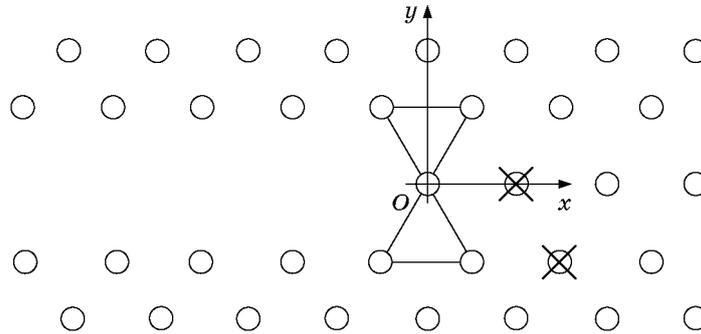


Рис. 1

закритического деформирования этой структуры и докритического деформирования следующей кристаллической структуры, когда в окрестности вершины трещины отсутствуют вакансии и примесные атомы. При выполнении достаточного критерия имеет место катастрофическое разрушение системы.

Рассмотрим более подробно классические достаточные критерии [6–9]. Если в континуальной модели воспользоваться представлениями решений для напряжений на продолжении острой трещины  $y = 0$  через коэффициент интенсивности напряжений (КИН)  $K_I^0$ , то с точностью до величин высшего порядка малости в окрестности вершины трещины для линейной задачи можно записать

$$\sigma_y(x, 0) \simeq \sigma_\infty + \frac{K_I^0}{(2\pi x)^{1/2}}, \quad (1)$$

где  $\sigma_\infty$  — характерное напряжение, заданное на бесконечности либо на контуре ограниченного тела. Представляют интерес два случая:

$$K_I^0 = 0; \quad (2)$$

$$K_I^0 > 0. \quad (3)$$

В классических критериях [6, 7] фактически используется ограничение (2). Трещина в рамках модели Леонова — Панасюка — Дагдейла образует своеобразный “носик”, а профиль модельной трещины имеет точку перегиба, в которой берега трещины имеют вертикальную касательную. Ограничение (2) имеет смысл рассматривать только в случае развитой пластичности [9]. Следует отметить, что никакая кристаллическая структура не может выдержать без потери устойчивости изменение геометрии берегов трещины в окрестности точек перегиба при выполнении ограничения (2). Достаточно подробное изложение концепции В. В. Новожилова, когда выполняется ограничение (2), приведено в [10].

Ниже рассматривается ограничение (3). По мнению авторов, в этом случае удобно пользоваться подходом В. В. Новожилова [10].

**1. Механические модели, формулировка достаточного критерия для трещин нормального отрыва.** Изучается поведение под нагрузкой тела, имеющего внутреннюю макротрещину. Пусть плоская макротрещина с прямолинейным фронтом не нарушает в макрообъеме структуру монокристалла [11]. Рассматривается плотноупакованный слой атомов, имеющий макротрещину и вакансии (рис. 1). Считается, что при образовании макротрещины из ряда удалена часть атомов, а непосредственно перед вершиной имеются вакансии, на рис. 1 отмеченные крестиком. На рис. 2 представлены схема нагружения трехатомной ячейки и типичная кривая деформирования при растяжении трехатомной ячейки:  $\sigma_m = \max \sigma(v)$  для нормальных напряжений;  $\mathbf{F}$  — вектор усилий, причем  $f = |\mathbf{F}|$ ,

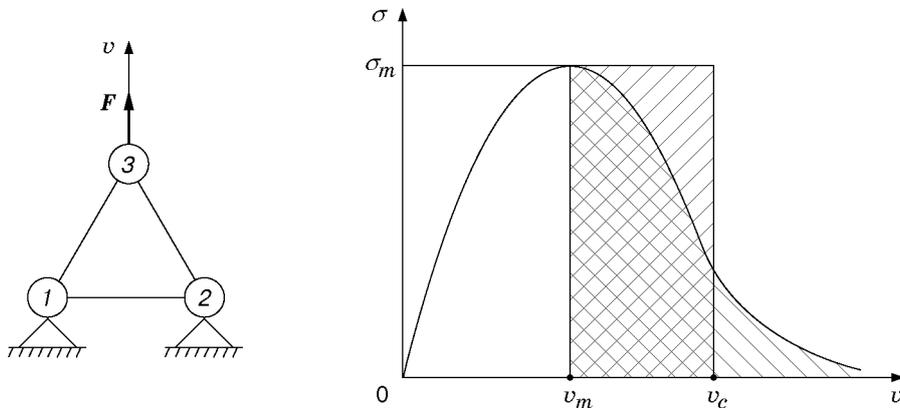


Рис. 2

$f_m = \max f$ ; от усилий к напряжениям можно перейти, используя осреднение для гибридной модели в механике разрушения;  $v$  — смещения вдоль оси  $Oy$ ;  $v_m$  — смещение, соответствующее  $f_m$ ;  $v_c$  — радиус области межатомных взаимодействий для трехатомной ячейки, который вычисляется с использованием энергетических соображений по правилу

$$\int_{v_m}^{\infty} f(v) dv = (v_c - v_m) f_m, \tag{4}$$

если известна кривая деформирования трехатомной ячейки  $f = f(v)$  при растяжении (на рис. 2 заштрихованная область под кривой равна площади заштрихованного прямоугольника). В соотношении (4) несобственный интеграл первого рода сходится, так как функция  $f(v)$  при  $v \rightarrow \infty$  быстро убывает, когда используются реальные физические потенциалы межатомного взаимодействия.

Смоделируем трещину двусторонним разрезом. На рис. 3 приведены модель трещины нормального отрыва ( $\Delta$  — нагруженный участок разреза) и схема раскрытия трещины. Для координаты  $x = -\Delta$  раскрытие трещины равно  $V$ . Возможные потери устойчивости атомных структур в окрестности точки  $x = -\Delta$  в данной работе не обсуждаются.

Рассматривается наиболее слабый слой атомов, расположенный перпендикулярно прямому фронту плоской острой макротрещины длиной  $2l$ . Предлагается достаточный дискретно-интегральный критерий квазихрупкой прочности для трещин нормального от-

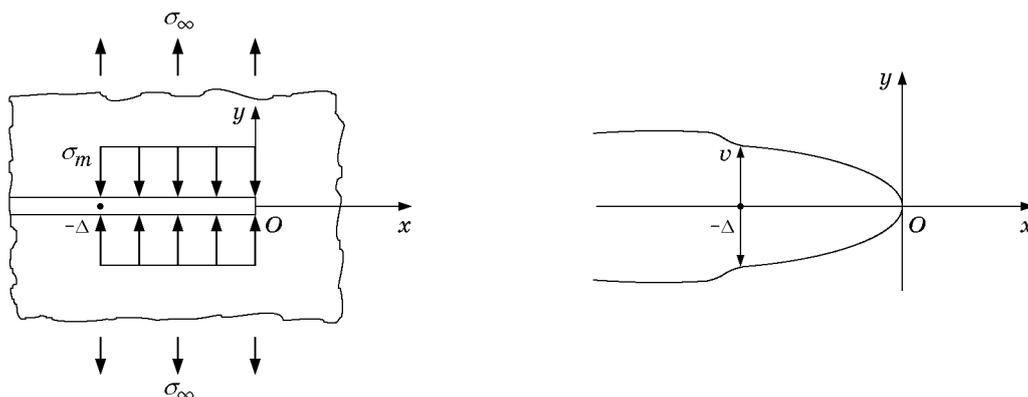


Рис. 3

рыва:

$$\frac{1}{kr_e} \int_0^{nr_e} \sigma_y(x, 0) dx \leq \sigma_m, \quad x \geq 0; \quad V = \frac{\varkappa + 1}{G} K_I^0 \sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}} \leq V^*, \quad x \leq 0. \quad (5)$$

Здесь  $\sigma_y(x, 0)$  — нормальные напряжения в вершине трещины в континуальной модели, имеющие интегрируемую особенность;  $Oxy$  — прямоугольная система координат, начало которой расположено в правой вершине трещины;  $r_e$  — расстояние между центрами атомов;  $n$  и  $k$  — числа, причем  $n \geq k$  ( $k$  — число межатомных связей);  $nr_e$  — интервал осреднения;  $\sigma_m$  — теоретическая прочность твердых тел на разрыв [12];  $V$  — удвоенные смещения берегов трещины;  $V^* = v_c - v_m$  — критическое раскрытие трещины нормального отрыва;  $\varkappa = 3 - 4\nu$  или  $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  соответственно для плоской деформации и плоского напряженного состояния;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $G$  — модуль сдвига. Напряжения  $\sigma_y$  для континуальной модели после осреднения с учетом поврежденности материала сравниваются с теоретической прочностью идеальных кристаллов  $\sigma_m$  в дискретной модели. Длину нагруженного участка разреза  $\Delta$ , используемую при формулировке достаточного критерия (5), можно определить, используя как конкретное кристаллическое строение материала в окрестности вершины трещины, так и реальные физические потенциалы межатомного взаимодействия. Взаимодействие между берегами трещины имеет место только на нагруженном участке разреза.

Очевидно, что  $V \rightarrow 0$  при  $\Delta \rightarrow 0$ , и достаточный критерий (5) становится необходимым [2, 3]. Пределы осреднения напряжений и в необходимом, и в достаточном критериях зависят от наличия, размера и положения дефектов кристаллической решетки в окрестности вершины трещины. Для плотноупакованного слоя атомов, представленного на рис. 1,  $n = 2$ ,  $k = 1$ . Величина этих осредненных напряжений не должна превышать теоретическую прочность  $\sigma_m$ . Отношение  $k/n$  характеризует поврежденность сплошного материала перед вершиной трещины. Прежде чем рассмотреть аналогичный параметр для интервала  $[-\Delta; 0]$  для материала, находящегося в предразрушенном состоянии, нужно проверить, выполняется ли ограничение  $\Delta/r_e \geq 2$ .

Пусть задана острая трещина длиной  $2l_{nk}^0$  такая, что  $\Delta = 0$ . При последовательном догружении не происходит подрастания трещины до нагрузок  $\sigma_\infty < \sigma_\infty^0$  ( $\sigma_\infty^0$  — критические напряжения для острых трещин, полученные по необходимым критериям [2, 3], которым соответствует длина трещины  $2l_{nk}^0$ ). Когда нагрузка превышает критические напряжения для необходимого критерия ( $\sigma_\infty > \sigma_\infty^0$ ), происходит страгивание трещины и начинают “работать” в закритическом режиме трехатомные ячейки, ближайшие к вершине трещины; одновременно формируются силовые связи в окрестности вершины трещины и сдвигается начало отсчета в модели, показанной на рис. 3. Из-за действующих силовых связей имеет место устойчивый рост трещины  $2l_{nk}^0 < 2l_{nk} < 2l_{nk}^{*0}$  до определенного уровня нагружения  $\sigma_\infty^{*0}$  ( $\sigma_\infty^{*0}$  — критические напряжения для острых трещин длиной  $l_{nk}^{*0}$ , полученные по достаточному критерию). При постепенном догружении таком, что  $\sigma_\infty^0 < \sigma_\infty < \sigma_\infty^{*0}$ , раскрытие трещины  $V$  увеличивается ( $V < V^*$ ); имеет место устойчивый рост трещины: при увеличении длины трещины увеличиваются и нагрузки:  $\Delta < \Delta^*$  ( $\Delta^*$  — критическая длина нагруженного участка разреза). Когда длина нагруженного участка разреза  $\Delta$  совпадает с критической величиной  $\Delta^*$ , т. е.  $V = V^*$ , устойчивый рост трещины сменяется неустойчивым. Получается своеобразная ловушка для распространяющихся трещин в квазихрупких материалах.

Получим соотношения, связывающие критические параметры  $K_I^{*0}$  и  $\Delta^*$  для острых трещин. После соответствующих преобразований имеем

$$\frac{K_I^{*0}}{\sigma_\infty^{*0} \sqrt{r_e}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} n \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_\infty^{*0}} \frac{k}{n} - 1 \right), \quad \Delta^* = 2\pi \left( \frac{G}{\varepsilon + 1} \frac{V^*}{K_I^{*0}} \right)^2. \quad (6)$$

Первое соотношение в (6) с точностью до обозначений совпадает с критическим КИНом необходимого критерия хрупкой прочности [2].

В соответствии с предлагаемой моделью КИН  $K_I^0$  достаточного критерия выражается в виде суммы двух слагаемых

$$K_I^0 = K_{I\infty}^0 + K_{I\Delta}^0, \quad (7)$$

где  $K_{I\infty}^0$  — КИН, порождаемый напряжениями  $\sigma_\infty$ ;  $K_{I\Delta}^0$  — КИН, порождаемый напряжениями  $\sigma_m$ , действующими в окрестности вершины трещины. Напомним, что в соответствии с моделью трещины нормального отрыва (рис. 3) КИН  $K_{I\infty}^0$  выражается через напряжения  $\sigma_\infty$ , заданные на бесконечности, и полудлину  $l_{nk}$  внутренней трещины, а КИН  $K_{I\Delta}^0$  — через напряжения  $\sigma_m$ , полудлину  $l_{nk}$  трещины и длину нагруженного участка разреза  $\Delta$  следующим образом:  $K_{I\infty}^0 = \sigma_\infty \sqrt{\pi l_{nk}}$ ,  $K_{I\Delta}^0 = -\sigma_m \sqrt{\pi l_{nk}} (1 - (2/\pi) \arcsin(1 - \Delta/l_{nk}))$ . Если напряжения  $\sigma_\infty$  обуславливают гладкую часть решения в окрестности вершины трещины (см. (1)), то напряжения  $\sigma_m$ , заданные на противоположных берегах разреза-трещины, самоуравновешены и не обуславливают ее. С учетом направления действия растягивающих напряжений  $\sigma_\infty$ , заданных на бесконечности, а также сжимающих напряжений  $\sigma_m$ , определенных на отрезке  $[-\Delta; 0]$ , в соответствии с достаточным критерием окончательно получим  $K_I^0$  для внутренних трещин нормального отрыва (см. (7)):

$$K_I^0 = \sigma_\infty \sqrt{\pi l_{nk}} - \sigma_m \sqrt{\pi l_{nk}} [1 - (2/\pi) \arcsin(1 - \Delta/l_{nk})] > 0. \quad (8)$$

В формуле (8)  $0 \leq \Delta \leq \Delta^*$ ,  $2l_{nk}^0 \leq 2l_{nk} \leq 2l_{nk}^{*0}$ . Очевидно, что при  $\Delta = 0$  КИН, полученный в соответствии с достаточным критерием, становится равным КИНу, полученному в соответствии с необходимым критерием, так как в этом случае  $K_{I\Delta}^0 = 0$ .

Получим оценки для величины  $\Delta$ . Соотношение (8) может быть существенно упрощено, если длина нагруженного участка  $[-\Delta; 0]$  намного меньше полудлины трещины, т. е.  $\Delta/l_{nk} \ll 1$ . Тогда имеем  $\arcsin(1 - \Delta/l_{nk}) \simeq \pi/2 - \sqrt{2\Delta/l_{nk}}$ . Из достаточного критерия (5) после соответствующих преобразований получим квадратное уравнение для безразмерного параметра  $\sqrt{\Delta/l_{nk}}$

$$\left( \sqrt{\frac{\Delta^*}{l_{nk}^{*0}}} \right)^2 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\sigma_\infty^{*0}}{\sigma_m} \sqrt{\frac{\Delta^*}{l_{nk}^{*0}}} + \frac{\pi}{2(\varepsilon + 1)} \frac{V^*}{l_{nk}^{*0}} \frac{G}{\sigma_m} = 0.$$

Пренебрегая величиной  $\Delta^*/l_{nk}^{*0}$  по сравнению с единицей, получим простое выражение для меньшего корня квадратного уравнения

$$\sqrt{\frac{\Delta^*}{l_{nk}^{*0}}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon + 1} \frac{V^*}{l_{nk}^{*0}} \frac{G}{\sigma_\infty^{*0}}. \quad (9)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если ограничение  $\Delta^*/l_{nk}^{*0} \ll 1$  не выполняется, из достаточного критерия (5) или соотношения (7) получается трансцендентное уравнение для определения  $\Delta^*/l_{nk}^{*0}$ . Особые трудности при решении этого уравнения отсутствуют, если оно имеет положительные корни меньше единицы.

Подставив (9) в (8), получим критический КИН  $K_I^{*0}$  острой внутренней трещины нормального отрыва, если  $\Delta^*/l_{nk}^{*0} \ll 1$ :

$$\frac{K_I^{*0}}{\sigma_\infty^{*0} \sqrt{\pi l_{nk}^{*0}}} = 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_\infty^{*0}} \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{\Delta^*}{l_{nk}^{*0}}}. \quad (10)$$

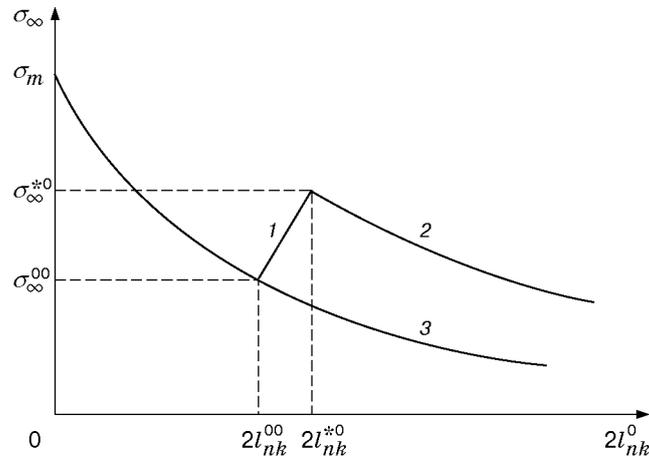


Рис. 4

Таким образом, кривая разрушения по достаточному критерию и критическая длина острой внутренней трещины нормального отрыва при заданном уровне нагружения записываются в виде

$$\frac{\sigma_\infty^{*0}}{\sigma_m} = \left( \frac{n}{k} + \frac{\sqrt{n}}{k} \sqrt{\frac{2l_{nk}^{*0}}{r_e}} \right)^{-1} \left( 1 + \frac{4\sqrt{n}}{\pi k} \sqrt{\frac{\Delta^*}{r_e}} \right); \quad (11)$$

$$\frac{2l_{nk}^{*0}}{r_e} = \left[ \frac{\sigma_m}{\sigma_\infty^{*0}} \left( 1 + \frac{4\sqrt{n}}{\pi k} \sqrt{\frac{\Delta^*}{r_e}} \right) - \frac{n}{k} \right] \frac{k^2}{n}. \quad (12)$$

Уравнения кривых разрушения по достаточному критерию (11) отличаются от уравнений кривых разрушения по необходимому критерию [2, 3] только последним множителем, зависящим от длины нагруженного участка разреза. В соотношениях (10)–(12) возможен предельный переход, когда КИН, длина нагруженного участка разреза и длина трещины стремятся к нулю.

Сопоставим критические нагрузки, полученные по необходимым и достаточным критериям для хрупких материалов для одних и тех же длин трещин:

$$\frac{\sigma_\infty^{*0}}{\sigma_\infty^{00}} = 1 + \frac{4\sqrt{n}}{\pi k} \sqrt{\frac{\Delta^*}{r_e}}. \quad (13)$$

Эти критические нагрузки существенно отличаются. Различие в величинах критических нагрузок можно объяснить эффектом Ребиндера [13–15].

На рис. 4 схематически показаны устойчивый (кривая 1) и неустойчивый (кривая 2) участки роста трещин, а также кривая разрушения, полученная по необходимым критериям [2, 3] (кривая 3). На устойчивом участке образовавшиеся системы воспринимают увеличивающуюся нагрузку, так как  $\sigma_\infty^{*0} > \sigma_\infty^{00}$ , в результате происходит подрастание трещины, поскольку  $l_{nk}^0 < l_{nk}^{*0}$ .

**2. Оценки прочности трехатомной ячейки.** Моделируется поведение атомной структуры в окрестности вершины трещины. Изучается потеря устойчивости трехатомной ячейки в плотноупакованном слое атомов при растяжении. Рассмотрим деформирование трехатомной ячейки, изображенной на рис. 2. Внешнее воздействие характеризуется силой  $F$ , приложенной к третьему атому ячейки. Действие межатомных сил предполагается центральным с потенциалом взаимодействия Морзе [12]

$$U(r) = D[e^{-2\alpha(r-r_e)} - 2e^{-\alpha(r-r_e)}],$$

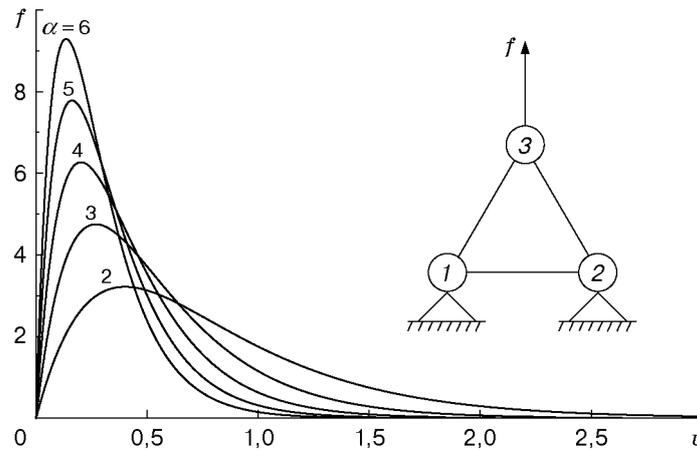


Рис. 5

где  $r$  — расстояние между атомами;  $r_e$  — расстояние между атомами в положении равновесия;  $D$ ,  $\alpha$  — константы. При  $r = r_e$  (равновесное состояние) центральная сила взаимодействия атомов равна нулю, при  $r < r_e$  между атомами действует сила отталкивания (отрицательная), при  $r > r_e$  — сила притяжения (положительная), которая достигает максимума  $f_m$  на некотором расстоянии  $r_m$ , так что при дальнейшем удалении атомов центральная сила их взаимодействия ослабевает и на расстоянии  $2r_e$  уменьшается на порядок по сравнению с максимальным значением. Первая производная от потенциала Морзе дает выражение центральной силы

$$f(r) = \frac{\partial U(r)}{\partial r} = 2D\alpha[e^{-\alpha(r-r_e)} - e^{-2\alpha(r-r_e)}],$$

откуда  $r_m = r_e + \ln(2/\alpha)$ ,  $f_m = D\alpha/2$ .

Нелинейная задача по деформированию атомной решетки решается методом конечных элементов [16]. Трехатомная ячейка представляет собой стержневую конструкцию, в которой узлы 1 и 2 закреплены, а узел 3 имеет две степени свободы. Конструкция под действием внешних сил подвергается растяжению. При численном решении задачи по деформированию атомной ячейки использовалась пошаговая процедура [17]. Из-за больших смещений и поворотов физически нелинейная задача деформирования атомной решетки становится также геометрически нелинейной. Решения подобных задач содержат собственные состояния типа максимальной нагрузки. Основная трудность решения таких задач состоит в том, что в качестве монотонно возрастающего параметра деформирования нельзя использовать внешнюю силу, действующую на атомную решетку. Второй особенностью, осложняющей решение задачи, является вырожденность касательной матрицы жесткости при достижении максимальной нагрузки. В этом случае итерационная процедура Ньютона — Рафсона не дает сходимости к решению задачи. Для преодоления указанных выше трудностей в [17] параметр внешней силы считается неизвестной величиной, а в качестве дополнительного уравнения задается длина дуги в  $(\mathbf{U}, \lambda)$ -пространстве ( $\mathbf{U}$  — вектор перемещений,  $\lambda$  — параметр внешней силы).

Численные расчеты проводились при следующих безразмерных значениях констант потенциала межатомного взаимодействия:  $r_e = 1$ ,  $D = 1,7$ ,  $\alpha = 2 \div 10$ . Радиус области межатомных взаимодействий  $v_c$  определялся по формуле (4). На рис. 5 представлена зависимость силы от смещения при растяжении трехатомной ячейки. В табл. 1 приведены полученные в расчетах значения  $v_m$ ,  $V^*$  для некоторых значений параметра  $\alpha$  при растяжении. Заметим, что значения  $V^*$  не зависят от параметра  $D$ . Полученные зависимости

Таблица 1

$\alpha$	$v_m/r_e$	$V^*/r_e$	$\alpha$	$v_m/r_e$	$V^*/r_e$
2	0,400	0,791	7	0,115	0,239
3	0,269	0,537	8	0,101	0,209
4	0,202	0,408	9	0,090	0,187
5	0,162	0,329	10	0,081	0,168
6	0,135	0,276			

сила — смещение подтверждают гипотезу, предложенную в п. 1: в формуле (4)  $f(v) > 0$  и  $f(v) \rightarrow 0$  при  $v \rightarrow \infty$ .

Найденные значения  $V^*/r_e$  позволяют, используя соотношения (9), (13), получить как безразмерные длины нагруженных участков трещин  $\Delta^*/r_e$ , так и отношения критических нагрузок  $\sigma_\infty^{*0}/\sigma_\infty^0$ . Проведенные численные расчеты показали, что в некоторых случаях можно перейти к простым оценкам. Для получения оценок формулу (9) запишем в виде

$$\sqrt{\frac{\Delta^*}{r_e}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{\varkappa + 1} \frac{V^*}{r_e} \sqrt{\frac{r_e}{l_{nk}^{*0}}} \frac{G}{\sigma_\infty^{*0}}. \quad (14)$$

В приближенное равенство (14) входят величины  $\sigma_\infty^{*0}$ ,  $l_{nk}^{*0}$ . Для получения оценок воспользуемся следующими соотношениями: 1) если длины трещин по достаточному и необходимому критериям совпадают, для критических нагрузок  $\sigma_\infty^{*0}(l_{nk}^0) > \sigma_\infty^0(l_{nk}^0)$ , причем  $\sigma_\infty^{*0} \rightarrow \sigma_\infty^0$  при  $\Delta \rightarrow 0$ ; 2) если действующие нагрузки таковы, что  $\sigma_\infty^0 < \sigma_\infty < \sigma_\infty^{*0}$ , то  $2l_{nk}^0 < 2l_{nk} < 2l_{nk}^{*0}$ , так как  $l_{nk}^{*0} = l_{nk}^0 + \Delta^*$ . Заменяя в соотношении (14) величины  $\sigma_\infty^{*0}$ ,  $l_{nk}^{*0}$  величинами  $\sigma_\infty^0$ ,  $l_{nk}^0$ , получим приближенное неравенство

$$\sqrt{\frac{\Delta^*}{r_e}} \lesssim \frac{\sqrt{2}}{\varkappa + 1} \frac{V^*}{r_e} \sqrt{\frac{r_e}{l_{nk}^0}} \frac{G}{\sigma_\infty^0}. \quad (15)$$

В [2, 3] с использованием необходимого критерия получено выражение критических напряжений  $\sigma_\infty^0$  (кривые разрушения) для острой внутренней трещины

$$\frac{\sigma_\infty^0}{\sigma_m} = \left( \frac{n}{k} + \frac{\sqrt{n}}{k} \sqrt{\frac{2l_{nk}^0}{r_e}} \right)^{-1}.$$

Последнее соотношение упрощается для достаточно длинных трещин, если  $2l_{nk}^0/r_e \gg 1$ :

$$\frac{\sigma_\infty^0}{\sigma_m} \simeq \frac{k}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{r_e}{2l_{nk}^0}}. \quad (16)$$

Согласно [12] оценки теоретической прочности имеют вид

$$\sigma_m = \eta_1 E, \quad (17)$$

где  $0,1 < \eta_1 < 0,3$ . Подставив (16) и (17) в (15), окончательно получим

$$\sqrt{\frac{\Delta^*}{r_e}} \lesssim \frac{1}{\varkappa + 1} \frac{V^*}{r_e} \frac{\sqrt{n}}{k(1 + \nu)\eta_1}. \quad (18)$$

Оценки критических нагрузок, полученные по необходимым и достаточным критериям для хрупких материалов для одних и тех же длин длинных трещин, имеют вид

$$\frac{\sigma_\infty^{*0}}{\sigma_\infty^0} \lesssim 1 + \frac{4n}{\pi k^2(1 + \nu)\eta_1} \frac{1}{\varkappa + 1} \frac{V^*}{r_e}. \quad (19)$$

Таблица 2

$\alpha$	Плоская деформация		Плоское напряженное состояние	
	$\Delta^*/r_e$	$\sigma_\infty^{*0}/\sigma_\infty^0$	$\Delta^*/r_e$	$\sigma_\infty^{*0}/\sigma_\infty^0$
2	2,369	3,769	1,955	3,519
3	1,092	2,880	0,901	2,710
4	0,630	2,428	0,520	2,299
6	0,288	1,966	0,238	1,879
8	0,165	1,732	0,137	1,666
10	0,107	1,588	0,088	1,535

Результаты расчетов, выполненных по (18), (19) для плоской деформации (массивные тела) и плоского напряженного состояния (тонкие напыленные пленки на податливой подложке), представлены в табл. 2.

При реальных значениях  $\alpha$  ( $3 \leq \alpha \leq 6$ ) отношение  $\Delta^*/r_e = 1,1 \div 0,23$ . При таких длинах нагруженных участков рассматривать поврежденность материала с использованием достаточных критериев смысла не имеет. В табл. 1, 2 приведена зависимость критических нагрузок по достаточному критерию от энергетических характеристик закритического деформирования трехатомных ячеек.

**3. Обобщенный вектор Бюргерса.** Так как при формулировке достаточного критерия (5) основным дополнительным элементом в отличие от формулировки необходимых критериев в [2, 3] было критическое раскрытие трещины нормального отрыва  $V^*$ , дадим два эквивалентных определения обобщенного вектора Бюргерса, следуя Коттреллу [18].

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1** (через упругое поле). Рассмотрим макротрещину при заданном нагружении. Выберем достаточно большой замкнутый контур, проходящий по сплошному материалу и пересекающий макротрещину в точке  $(-\Delta; 0)$ , контур Бюргерса обходится против часовой стрелки. Пусть  $ds$  — элемент контура Бюргерса,  $v$  — смещение вдоль оси  $Oy$ , тогда раскрытие нагруженной трещины нормального отрыва  $V$  выражается через контурный интеграл

$$V = \oint \frac{\partial v}{\partial s} ds. \quad (20)$$

Соотношение (20) определяет компоненты обобщенного вектора Бюргерса  $\mathbf{b} = (0, V)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2** (типа Бюргерса — Франка). Рассмотрим макротрещину при заданном нагружении. Образует замкнутый контур в идеальной кристаллической решетке (макротрещина отсутствует). Пусть этот контур проходит через точку  $(-\Delta; 0)$ . Тогда соответствующий контур, охватывающий вершину макротрещины, окажется разомкнутым, и обобщенным вектором Бюргерса будет вектор  $\mathbf{b}$  идеальной решетки, соответствующий разрыву контура в дефектном кристалле после введения макротрещины.

Предлагаемые определения, отличные от принятых в физике твердого тела, могут быть использованы при формулировке достаточного критерия прочности при обобщенном напряженном состоянии [3]. В этом случае обобщенный вектор Бюргерса имеет две компоненты:  $\mathbf{b} = (U, V)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 212–222.

2. **Корнев В. М.** Интегральные критерии хрупкой прочности трещиноватых тел с дефектами при наличии вакансий в носике трещины. Прочность компактированных тел типа керамик // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 168–177.
3. **Kornev V. M., Kurguzov V. D.** A discrete-integral strength criterion for complicated stress states // Fatigue Fracture Engng Materials Structures. 1999. V. 22, N 11. P. 989–995.
4. **Андреев А. В., Корнев В. М., Тихомиров Ю. В.** Обрыв атомных связей в вершине трещины. Потеря устойчивости участка цепочки атомов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1993. № 5. С. 135–146.
5. **Корнев В. М., Тихомиров Ю. В.** О критерии хрупкого разрушения тел с трещиной при наличии дефекта атомной решетки // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 2. С. 185–193.
6. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
7. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
8. **Баренблатт Г. И.** Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.
9. **Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
10. **Черных К. Ф.** Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1996.
11. **Шмитт-Томас К. Г.** Металловедение для машиностроения. М.: Металлургия, 1995.
12. **Макмиллан Н.** Идеальная прочность твердых тел // Атомистика разрушения: Сб. ст. 1983–1985 гг. / Сост. А. Ю. Ишлинский. М.: Мир, 1987. С. 35–103.
13. **Корнев В. М., Разворотнева Л. И.** Сравнительные оценки прочности сухого и влажного кварца при измельчении // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 1. С. 138–144.
14. **Корнев В. М.** Снижение прочности металлов при хемосорбции водорода в вершине трещины // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 3. С. 173–178.
15. **Kornev V. M., Razvorotneva L. I.** Brittle fracture of cracked solids as affected by surfactants // Damage and fracture mechanics. Computer aided assessment and control. Southampton; Boston: Comput. Mech. Publ., 1998. P. 565–574.
16. **Bathe K.-J.** Finite element procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1982.
17. **Коробейников С. Н.** Применение метода конечных элементов к решению нелинейных задач по деформированию и потере устойчивости атомных решеток. Новосибирск, 1997. (Препр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики; № 1-97).
18. **Коттрелл А.** Теория дислокаций. М.: Мир, 1969.

*Поступила в редакцию 27/VII 2000 г.*