Таким образом, учет влияния истории деформирования на скорость накопления повреждений в форме, даваемой системой (2.5), расширяет круг экспериментальных данных, которые могут быть описаны в рамках кинетического критерия накопления повреждений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мэнсон С.** Температурные напряжения и малоцикловая усталость. М.: Машиностроение, 1974.
2. **Серенсен С. В., Шнейдерович Р. М., Гусенков А. П. и др.** Прочность при малоцикловом нагружении. Основы методов расчета и испытаний. М.: Наука, 1975.
3. **Колмогоров В. Л., Богатов А. А., Мигаев Б. А. и др.** Пластичность и разрушение. М.: Металлургия, 1977.
4. **Feltner C. E.** Dislocation arrangements in aluminium deformed by repeated tensile stresses.— Acta Metallurgica, 1963, vol. 11, N 4.
5. **Ильюшин А. А.** Об одной теории длительной прочности.— Изв. АН СССР. МТТ, 1967, № 3.
6. **Работнов Ю. Н.** О разрушении вследствие ползучести.— ПМТФ, 1963, № 2.
7. **Рыбакина О. Г.** Феноменологическое описание разрушения металлов при некоторых видах асимметричного деформирования.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 6.
8. **Новожилов В. В.** О перспективах феноменологического подхода к проблеме разрушения.— В кн.: Механика деформированных тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975.
9. **Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В.** Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения.— ПММ, 1958, т. 22, вып. 1.
10. **Рыбакина О. Г.** Феноменологическое описание малоцикловой усталости металлов в условиях концентрации напряжений.— В кн.: Проблемы механики твердого деформированного тела. Л.: Судостроение, 1970.
11. **Рыбакина О. Г.** Феноменологическая теория малоцикловой усталости.— В кн.: Актуальные проблемы механики сплошных сред. Л.: ЛГУ, 1977.
12. **Мовчан А. А.** О различных критериях определения эквивалентного размаха пластической деформации в теории малоцикловой усталости.— Проблемы прочности, 1982, № 12.
13. **Мовчан А. А.** О разрушении при непропорциональном циклическом деформировании.— В кн.: V Всесоюз. съезд по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата: Наука, 1981.
14. **Можаровский Н. С., Рудаков К. Н., Заховайко А. А.** Деформирование и разрушение материала при сложном нагружении в условиях плоского напряженного состояния.— ПМ, 1982, № 12.
15. **Мовчан А. А.** О расчете на ресурс элементов конструкций, подверженных малоцикловому деформированию со сдвигом фаз.— В кн.: Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций летательных аппаратов. Тематический сборник научных трудов Московского авиационного института. М., 1981.
16. **Мовчан А. А.** Долговечность элементов конструкций при наложении вибрационного пути пластического деформирования на повторно-статический.— В кн.: Прочность элементов конструкций летательных аппаратов. Тематический сборник научных трудов Московского авиационного института. М., 1982.
17. **Ильюшин А. А.** Пластичность (основы общей математической теории). М.: Изд-во АН СССР, 1963.
18. **Мовчан А. А.** Об одной гипотезе накопления повреждений при пластическом деформировании. М.: МАИ, 1982. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3797-81 Деп.
19. **Мовчан А. А.** О законе суммирования повреждений при сложных путях пластического деформирования.— Проблемы прочности, 1981, № 8.
20. **Weiss V., Sessler J., Packman P.** Effect of several parameters on low cycle fatigue behavior.— Acta Metallurgica, 1963, vol. 11, N 4.
21. **Martin D. E.** An energy criterion for low-cycle fatigue.— Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Eng., 1961, vol. 83, N 4. Рус. пер. Техническая механика. Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Сер. Д, 1963, № 4.
22. **Drucker D. C., Mylonas G., Lianis G.** Exhaustion of ductility of E-steel following compressive prestrain.— Welding J., 1960, vol. 39, N 3.

Поступила 28/III 1983 г.

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ДИАГНОСТИКИ ДЛЯ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ

В. А. ЛОМАЗОВ, Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ

(Красноярск)

Под задачей диагностики будем понимать задачу определения характеристик среды по информации, полученной при помощи некоторого числа испытаний (тестовых задач). Подобные постановки задач получили широкое распространение в геофизике, в частности в сейсморазведке. Общим методам, применяемым при решении таких задач, посвящена работа [1]. Изучение постановок и методов решения задач диагностики в рамках механики деформируемого твердого тела связано с необходимостью отбора некачественных изделий, определения характера износа изделия в процессе работы, изучения влияния внешних воздействий на изменение свойств материала.

Данная работа посвящена определению некоторого небольшого по величине изменения термоупругих характеристик материала, первоначальные свойства которого известны. Это можно интерпретировать как уточнение свойств материала. Действительно, уже в процессе изготовления изделия на материал действуют внешние воздействия, связанные с технологией производства, что, вообще говоря, приводит к изменению свойств этого материала. Предлагается метод определения новых термоупругих характеристик в предположении о том, что эти характеристики остались близки характеристикам среды, бывшей первоначально однородной, изотропной. Рассмотрен пример применения этого метода.

1. Распространение термоупругих волн в неоднородной анизотропной среде описывается уравнениями [2]:

$$\rho \ddot{u}_i = (C_{ijkl}\, u_{k,l})_{,j} - (\beta_{ij}\Theta)_{,j}; \tag{1.1}$$

$$C_\varepsilon \dot{\Theta} - (K_{ij}\Theta_{,i})_{,j} = 0, \tag{1.2}$$

где ρ — плотность; Θ — относительная температура; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений; $\beta_{ij} = C_{ijkl}\alpha_{kl}$; α_{kl} — коэффициенты термического линейного расширения; C_{ijkl} — изотермические коэффициенты жесткости; K_{ij} — коэффициенты теплопроводности. Все коэффициенты являются функциями пространственных переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\Theta = \Theta(\mathbf{x}, t)$.

Обозначим через ρ^0, C^0_{ijkl}, β^0_{ij}, C^0_ε, K^0_{ij} величины, характеризующие термоупругие свойства однородной изотропной среды. В этом случае указанные величины являются постоянными и, кроме того, тензоры C^0_{ijkl}, β^0_{ij}, K^0_{ij} имеют специфический (более простой) вид [2].

В дальнейшем будем считать, что рассматриваемая среда является слабо неоднородной и слабо анизотропной, т. е. величины $|\rho - \rho^0|$, $|C_\varepsilon - C^0_\varepsilon|$, $|C_{ijkl} - C^0_{ijkl}|$, $|\beta_{ij} - \beta^0_{ij}|$, $|K_{ij} - K^0_{ij}|$ имеют одинаковый малый порядок $O(\varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1$, в то время как величины ρ^0, C^0_ε, C^0_{ijkl}, β^0_{ij}, K^0_{ij} имеют порядок $O(1)$. Понятие слабо неоднородной, слабо анизотропной среды является естественным, так как многие природные и искусственно создаваемые материалы являются по своим свойствам близкими к однородным, изотропным. В то же время небольшое изменение свойств материала, бывшего первоначально однородным и изотропным, которое может произойти под действием достаточно слабых внешних воздействий, например облучения, может привести к существенному изменению поведения тела. В этом случае задача диагностики в рамках принятого предположения может быть использована как для изучения изменения свойств материала под действием внешних воздействий, так и для определения характера и интенсивности воздействия по изменениям свойств образца, выступающего в данном случае в роли индикатора.

Обозначим через $u^0_i(\mathbf{x}, t)$, $\Theta^0(\mathbf{x},t)$ решение системы уравнений

$$\rho^0 \ddot{u}^0_i = C^0_{ijkl} u^0_{k,lj} - \beta^0_{ij}\Theta^0_{,j}, \quad i, j, k, l = \overline{1,3}; \tag{1.3}$$

$$C^0_\varepsilon \dot{\Theta}^0 - K^0_{ij}\Theta^0_{,ij} = 0. \tag{1.4}$$

В дальнейшем будем предполагать, что функции $u^\varepsilon_i = u_i(\mathbf{x}, t) - u^0_i(\mathbf{x}, t)$, $\Theta^\varepsilon = \Theta(\mathbf{x}, t) - \Theta^0(\mathbf{x}, t)$ и их первые и вторые производные по x_i, $i = \overline{1, 3}$, t имеют порядок малости $O(\varepsilon)$, $\varepsilon \ll 1$. При этом предполагается, что $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\Theta(\mathbf{x}, t)$ и $u^0_i(\mathbf{x}, t)$, $\Theta^0(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют одним и тем же начальным и граничным условиям соответственно. В этом случае, пренебрегая членами, имеющими порядок $O(\varepsilon^2)$, и считая функции $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\Theta(\mathbf{x}, t)$ ограниченными вместе со своими частными производными по x_i, t до второго порядка включительно, уравнения (1.1), (1.2) с учетом (1.3), (1.4) сводим к уравнениям

$$\rho^0 \ddot{u}^\varepsilon_i - C^0_{ijkl} u^\varepsilon_{k,lj} + \beta^0_{ij}\Theta^\varepsilon_{,j} = f_i; \tag{1.5}$$

$$C^0_\varepsilon \dot{\Theta}^\varepsilon - K^0_{ij}\Theta^\varepsilon_{,ij} = g, \text{ где} \tag{1.6}$$

$$f_i = -\rho^\varepsilon \ddot{u}^0_i + \left(C^\varepsilon_{ijkl} u^0_{k,l}\right)_{,j} - \left(\beta^\varepsilon_{ij}\Theta^0\right)_{,j}; \tag{1.7}$$

$$g = -C^\varepsilon_\varepsilon \dot{\Theta}^0 + \left(K^\varepsilon_{ij}\Theta^0_{,i}\right)_{,j}, \quad \rho^\varepsilon = \rho - \rho^0, \quad C^\varepsilon_{ijkl} = C_{ijkl} - C^0_{ijkl}, \quad \beta^\varepsilon_{ij} = \beta_{ij} - \beta^0_{ij}, \tag{1.8}$$

$$C^\varepsilon_\varepsilon = C_\varepsilon - C^0_\varepsilon, \quad K^\varepsilon_{ij} = K_{ij} - K^0_{ij}, \quad i, j, k, l = \overline{1, 3}.$$

Используем полученные уравнения для решения задачи диагностики слабо неоднородной, слабо анизотропной термоупругой среды. Задача ставится следующим образом.

Пусть уравнения (1.1), (1.2) справедливы в области $-\infty < x_1,\ x_2 < \infty$, $0 \leqslant x_3 < \infty$, $t_0 \leqslant t \leqslant \infty$. Рассмотрим m различных краевых задач для этих уравнений. Решение n-й краевой задачи будем обозначать $u_i^{(n)}$, $\Theta^{(n)}$. Пусть ей соответствуют начальные условия

$$u_i^{(n)}(\mathbf{x}, t_0) = \varphi_i^{(n)}(\mathbf{x}), \quad n = \overline{1, m},\ i = \overline{1, 3}; \tag{1.9}$$

$$\dot{u}_i^{(n)}(\mathbf{x}, t_0) = 0; \tag{1.10}$$

$$\Theta^{(n)}(\mathbf{x}, t_0) = \psi^{(n)}(\mathbf{x}) \tag{1.11}$$

и граничные условия

$$\frac{\partial}{\partial x_3} u_i^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = 0; \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \Theta^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = 0. \tag{1.13}$$

Вследствие симметрии тензор $C_{ijkl}(\mathbf{x})$ содержит 21, тензор $\beta_{ij}(\mathbf{x})$ — 6 и тензор $K_{ij}(\mathbf{x})$ — также 6 независимых компонент [2]. Таким образом, задача в общем случае состоит в определении 33 функций пространственных переменных по дополнительной информации, получаемой из тестовых испытаний.

Будем считать, что нам известна некоторая информация о решении m краевых задач, эта информация имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = \chi_1^{(n)}(x_1, x_2, t); \tag{1.14}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = \boldsymbol{\chi}_2^{(n)}(x_1, x_2, t); \tag{1.15}$$

$$\Theta^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = \chi_3^{(n)}(x_1, x_2, t), \tag{1.16}$$

$$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} < r, \quad r > 0, \quad n = \overline{1, m}.$$

Заметим, что из (1.15) непосредственно следует, что вектор-функция $\boldsymbol{\chi}_2^{(n)} = \left(\chi_{21}^{(n)}, \chi_{22}^{(n)}, \chi_{23}^{(n)}\right)$ не может быть произвольной. Для нее должно выполняться условие $\operatorname{div} \boldsymbol{\chi}_2^{(n)} = 0$.

Считаем также, что ρ^0, C_{ijkl}^0, β_{ij}^0, K_{ij}^0, C_ε^0 известны, а следовательно, и $u_i^{0(n)}$, $\Theta^{0(n)}$, удовлетворяющие уравнениям термоупругости с этими коэффициентами и начальным и граничным условиям, совпадающим с (1.9)—(1.13), можно считать известными. Таким образом, задача фактически сводится к определению C_{ijkl}^ε, β_{ij}^ε, K_{ij}^ε.

2. Приступим к исследованию поставленной задачи. Как показано выше, в рамках сделанных предположений уравнения (1.1), (1.2) сводятся к уравнениям (1.5)—(1.8). Сначала определим правые части $f_i^{(n)}$, $g^{(n)}$ в уравнениях вида (1.5), (1.6), соответствующих n-му испытанию, т. е. n-й краевой задаче с начальными и граничными данными (1.9)—(1.13). Применяя к этим уравнениям операторы div и rot, получим

$$\rho^0 \ddot{v}^{(n)} - (\lambda^0 + 2\mu^0)\Delta v^{(n)} + \beta^0 \Delta T^{(n)} = F_1^{(n)}; \tag{2.1}$$

$$\rho^0 \ddot{\boldsymbol{\omega}}^{(n)} - \mu^0 \Delta \boldsymbol{\omega}^{(n)} = \mathbf{F}_2^{(n)}; \tag{2.2}$$

$$C_\varepsilon^0 \dot{T}^{(n)} - K^0 \Delta T^{(n)} = F_3^{(n)}, \tag{2.3}$$

где $v^{(n)} = \operatorname{div} \mathbf{u}^{\varepsilon(n)}$, $\boldsymbol{\omega}^{(n)} = \operatorname{rot} \mathbf{u}^{\varepsilon(n)}$, $T^{(n)} = \Theta^{\varepsilon(n)}$, $F_1^{(n)} = \operatorname{div} \mathbf{f}^{(n)}$, $\mathbf{F}_2^{(n)} = \operatorname{rot} \mathbf{f}^{(n)}$, $F_3^{(n)} = g^{(n)}$, λ^0, μ^0 — постоянные Ламэ. Они полностью характеризуют упругие свойства однородной изотропной среды [2]. При этом элементы тензора жесткости связаны с постоянными Ламэ соотношениями: $C_{1111}^0 = C_{2222}^0 = C_{3333}^0 = \lambda^0 + 2\mu^0$, $C_{1122}^0 = C_{1133}^0 = C_{2233}^0 = \lambda^0$, $C_{1112}^0 = C_{1113}^0 = C_{1123}^0 = C_{1213}^0 = C_{2213}^0 = C_{1323}^0 = C_{2212}^0 = C_{2223}^0 = C_{1223}^0 = C_{3313}^0 = C_{3312}^0 = C_{3323}^0 = 0$, $C_{1212}^0 = C_{1313}^0 = C_{2323}^0 = 2\mu^0$, $\beta_{ij}^0 = \delta_{ij}\beta^0$, β^0 — коэффициент объемного термического расширения, $K_{ij}^0 = \delta_{ij}K^0$, K^0—коэффициент теплопроводности, $i, j = \overline{1, 3}$. Все эти величины являются характеристиками однородной изотропной среды.

Заметим, что если начальные условия (1.9)—(1.11) выбраны так, что они удовлетворяют однородным статическим уравнениям термоупругого равновесия с постоянными коэффициентами C^0_{ijkl}, β^0_{ij}, K^0_{ij}, то $u^{0(n)}_i$, $\Theta^{0(n)}$ не зависят от времени t, а следовательно, $F_1^{(n)} = F_1^{(n)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}_2^{(n)} = \mathbf{F}_2^{(n)}(\mathbf{x})$, $F_3^{(n)} = F_3^{(n)}(\mathbf{x})$, $n = \overline{1, m}$. Таким образом, мы приходим к задаче о нахождении $F_1^{(n)}$, $\mathbf{F}_2^{(n)}$, $F_3^{(n)}$, входящих в уравнения (2.1)—(2.3) при начальных условиях

(2.4) $$v^{(n)}(\mathbf{x}, t_0) = 0, \quad \dot{v}^{(n)}(\mathbf{x}, t_0) = 0;$$

(2.5) $$\boldsymbol{\omega}^{(n)}(\mathbf{x}, t_0) = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}^{(n)}(\mathbf{x}, t_0) = 0;$$

(2.6) $$T^{(n)}(\mathbf{x}, t_0) = 0$$

и граничных условиях

(2.7) $$\frac{\partial}{\partial x_3} v^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = 0;$$

(2.8) $$\frac{\partial}{\partial x_3} \boldsymbol{\omega}^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = 0;$$

(2.9) $$\frac{\partial}{\partial x_3} T^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = 0.$$

Неизвестные правые части уравнений (2.1)—(2.3) находятся по дополнительной информации:

(2.10) $$v^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = \chi_1^{(n)}(x_1, x_2, t) - \operatorname{div} \mathbf{u}^{0(n)}(x_1, x_2, 0, t);$$

(2.11) $$\boldsymbol{\omega}^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = \boldsymbol{\chi}_2^{(n)}(x_1, x_2, t) - \operatorname{rot} \mathbf{u}^{0(n)}(x_1, x_2, 0, t);$$

(2.12) $$T^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = \chi_3^{(n)}(x_1, x_2, t) - \Theta^{0(n)}(x_1, x_2, 0, t).$$

Дополнительная информация (2.10)—(2.12), как и ранее информация (1.14)—(1.16), определена в области

$$(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} < r, \ r > 0; \ t_0 \leqslant t < \infty.$$

Заметим, что полученная задача в свою очередь разбивается на три типа обратных задач, требующих последовательного решения.

Задача I. Определение $\mathbf{F}_2^{(n)}$ из задачи (2.2), (2.5), (2.8) по информации (2.11).

Задача II. Определение $F_3^{(n)}$ из задачи (2.3), (2.6), (2.9) по информации (2.12).

Задача III. Определение $F_1^{(n)}$ из задачи (2.1), (2.4), (2.7) по информации (2.10) с использованием при этом решения задачи II.

3. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу IV. Определим неизвестную функцию $\Phi(\mathbf{x})$ $-\infty < x_1, x_2 < \infty$, $0 \leqslant x_3 < \infty$ по информации

(3.1) $$U(x_1, x_2, 0, t) = \chi(x_1, x_2, t), \quad (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} < r, \quad r > 0$$

о решении $U(\mathbf{x}, t)$ задачи

(3.2) $$\ddot{U} - \Delta U = \Phi;$$

(3.3) $$U(\mathbf{x}, t_0) = 0, \quad \dot{U}(\mathbf{x}, t_0) = 0;$$

(3.4) $$\frac{\partial}{\partial x_3} U(x_1, x_2, 0, t) = 0.$$

Продифференцируем (3.1), (3.2), (3.4) частным образом по t и обозначим $\dot{U}(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x}, t)$. Тогда относительно V имеем

(3.5) $$\ddot{V} - \Delta V = 0;$$

(3.6) $$V(\mathbf{x}, t_0) = 0;$$

(3.7) $$\frac{\partial}{\partial x_3} V(x_1, x_2, 0, t) = 0;$$

(3.8) $$V(x_1, x_2, 0, t) = \dot{\chi}(x_1, x_2, t), \quad (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} < r \quad r > 0.$$

Задача типа (3.5)—(3.8) рассматривалась в [3]. Там же получено явное выражение для $\dot{V}(x, t_0)$. Однако $\dot{V} = \ddot{U}$. Поэтому, подставляя это выражение в (3.2), учитывая

(3.3) и то, что $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$, получим $\Phi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}, t_0)$, что позволяет, учитывая решение из [3], получить при $r = \infty$ для функции $\Phi(\mathbf{x})$ явное выражение

$$\Phi\left(x_1, x_2, \left(\tau - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2}\right) = \frac{\left(\tau - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2}}{4\pi} \times \tag{3.9}$$

$$\times \int\limits_{|\xi|=1} dS_\xi \left(\frac{2J\left(\xi, \tau^{1/2}, \tau\right)}{\tau^{1/2} - x_1\xi_1 - x_2\xi_2} - \int\limits_{-\tau^{1/2}}^{\tau^{1/2}} \frac{\frac{\partial}{\partial \eta} J(\xi, \eta, \tau)}{\eta - x_1\xi_1 - x_2\xi_2} d\eta \right),$$

$$J(\xi, \eta, \tau) = -\frac{2}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dp \int\limits_0^{\infty} \frac{\dot{\chi}(\xi_1 p, \ \xi_2 p, \ t)}{t^2 - p^2 + 2p\eta - \tau} dt,$$

$$x_3 = \left(\tau - x_1^2 - x_2^2\right)^{1/2}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1, \quad \tau > \eta^2.$$

4. Приступим к решению задачи I. Естественной заменой переменных после соответствующего переобозначения приведем уравнение (2.2) к безразмерному виду. Получим

$$\ddot{\omega}_i^{(n)} - \Delta\omega_i^{(n)} = F_{2i}^{(n)}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad n = \overline{1, m},$$

$$\omega_i^{(n)}(\mathbf{x}, t_0) = 0, \quad \dot{\omega}_i^{(n)}(\mathbf{x}, t_0) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\omega_i^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = 0,$$

$$\omega_i^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = \dot{\chi}_{2i}^{(n)}(x_1, x_2, t) - (\mathrm{rot})_i\, \mathbf{u}^{0(n)}(x_1, x_2, 0, t),$$

$$\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} < r, \quad r > 0.$$

Заметим, что задача I разбилась на $3m$ независимых задач типа задачи IV. Определение $F_{2i}^{(n)}$ сводится к подстановке в (3.9) выражений $\left(\dot{\chi}_{2i}^{(n)}(x_1, x_2, t) - (\mathrm{rot})_i \mathbf{u}^{0(n)}(x_1, x_2, 0, t)\right)$ вместо $\dot{\chi}(x_1, x_2, t)$. Затем при помощи обратной замены переменных можно восстановить размерные функции.

5. Перейдем к решению задачи II. Приведем уравнение (2.3) к безразмерному виду. Между решениями задач Коши для уравнения теплопроводности и для волнового уравнения при определенном соответствии начальных условий существует взаимосвязь [4]. Эта взаимосвязь позволяет в нашем случае получить

$$T^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\tau^2/4t\right) W^{(n)}(\mathbf{x}, \tau)\, d\tau, \quad n = \overline{1, m}, \tag{5.1}$$

где $T^{(n)}(\mathbf{x}, t)$ — решение приведенного к безразмерному виду уравнения (2.3) с начальными и граничными условиями (2.6), (2.9), а $W^{(n)}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{W}^{(n)} - \Delta W^{(n)} = F_3^{(n)} \tag{5.2}$$

при начальных и граничных условиях

$$W^{(n)}(\mathbf{x}, t_0) = 0, \quad \dot{W}^{(n)}(\mathbf{x}, t_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} W^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = 0.$$

Соотношение (5.1) позволяет однозначно определить $W^{(n)}(\mathbf{x}, t)$ по известным функциям $T^{(n)}(x, t)$ [4], а значит, можно однозначно определить $W^{(n)}(x_1, x_2, 0, t) = \chi^{(n)}(x_1, x_2, t)$ при $\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2} < r, \quad r > 0$ из уравнения

$$\chi_3^{(n)}(x_1, x_2, t) - \Theta^{0(n)}(x_1, x_2, 0, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\tau^2/4t\right) \chi^{(n)}(x_1, x_2, \tau)\, d\tau. \tag{5.3}$$

Здесь мы считаем, что в функциях $\chi_3^{(n)}$, $\Theta^{0(n)}$ проведена соответствующая обезразмеривающая замена переменных, но для удобства сохранены прежние обозначения.

Краевая задача для уравнения (5.2) с дополнительной информацией, получаемой из (5.3), позволяет, воспользовавшись вспомогательной задачей IV, однозначно определить $F_3^{(n)}(\mathbf{x})$, $n = \overline{1, m}$.

6. Рассмотрим решение задачи III. Представим решение уравнения

$$\ddot{v}^{(n)}-(\lambda^0+2\mu^0)\,\Delta v^{(n)}=-\beta^0\Delta T^{(n)}+F_1^{(n)}$$

в виде суммы однородного решения и двух частных решений, соответствующих двум слагаемым, из которых состоит правая часть этого уравнения $v^{(n)}=v^{0(n)}+v^{1(n)}+$ $+v^{2(n)}$. Функцию $v^{0(n)}=\operatorname{div}\mathbf{u}^{0(n)}$ можно считать известной. Фукция $v^{1(n)}(\mathbf{x},t)$ находится из решения задачи

$$\ddot{v}^{1(n)}-(\lambda^0+2\mu^0)\Delta v^{1(n)}+\beta^0\Delta T^{(n)}=0,\quad n=\overline{1,m},$$

$$v^{1(n)}(\mathbf{x},t_0)=0,\ \dot{v}^{1(n)}(\mathbf{x},t_0)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}v^{1(n)}(x_1,x_2,0,t)=0,$$

$T^{(n)}(\mathbf{x},t)$ однозначно определяется из (2.3), (2.6), (2.9) по известной функции $F_3^{(n)}$. Следовательно, $v^{1(n)}(\mathbf{x},t)$ можно также считать известной.

Теперь $F_1^{(n)}(\mathbf{x})$, $n=\overline{1,m}$, находятся из задачи

(6.1) $$\ddot{v}^{2(n)}-(\lambda^0+2\mu^0)\,\Delta v^{2(n)}=F_1^{(n)};$$

(6.2) $$v^{2(n)}(\mathbf{x},t_0)=0,\quad \dot{v}^{2(n)}(\mathbf{x},t_0)=0;$$

(6.3) $$\frac{\partial}{\partial x_3}v^{2(n)}(x_1,x_2,0,t)=0$$

по информации

(6.4) $$v^{2(n)}(x_1,x_2,0,t)=\chi_1^{(n)}(x_1,x_2,t)-v^{0(n)}(x_1,x_2,0,t)-v^{1(n)}(x_1,x_2,0,t),$$
$$\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}<r,\quad r>0.$$

Поскольку система (6.1)—(6.4) распадается на m задач, которые после приведения к безразмерному виду аналогичны задаче IV, задачу III также можно считать решенной.

7. Приступим далее к непосредственному определению характеристик слабо неоднородной, слабо анизотропной термоупругой среды. Задачи I—III позволили нам определить $F_1^{(n)}$, $\mathbf{F}_2^{(n)}$, $F_3^{(n)}$, $n=\overline{1,m}$. Если считать, что на границе полупространства $x_3\geqslant 0$ характеристики рассматриваемой среды и их производные по x_3 совпадают с соответствующими характеристиками однородной изотропной среды, то $\mathbf{f}^{(n)}=g^{(n)}=$ $=0$ при $x_3=0$. Это условие позволяет однозначно определить $\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{x})$ из уравнений $\operatorname{rot}\mathbf{f}^{(n)}=\mathbf{F}_2^{(n)}$, $\operatorname{div}\mathbf{f}^{(n)}=F_1^{(n)}$. Поскольку $g^{(n)}=F_3^{(n)}$, в дальнейшем $\mathbf{f}^{(n)}$, $g^{(n)}$, $n=$ $=\overline{1,m}$, можно считать известными.

Термоупругие характеристики C_{ijkl}^{ε}, β_{ij}^{ε}, K_{ij}^{ε} находятся из двух систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, соответствующих уравнениям (1.7), (1.8). При этом, поскольку начальные условия (1.9)—(1.11) выбраны так, что они удовлетворяют однородным статическим уравнениям термоупругости с постоянными коэффициентами C_{ijkl}^0, β_{ij}^0, K_{ij}^0, то $\dot{u}^{0(n)}(\mathbf{x},t)=0$, $\dot{\Theta}^{0(n)}(\mathbf{x},t)=0$, а значит, $u_i^{0(n)}=u_i^{0(n)}(\mathbf{x})=\varphi_i^{(n)}(\mathbf{x})$, $\Theta^{0(n)}=\Theta^{0(n)}(\mathbf{x})=\psi^{(n)}(\mathbf{x})$,

(7.1) $$\left(C_{ijkl}^{\varepsilon}\varphi_{k,l}^{(n)}\right)_{,j}-\left(\beta_{ij}^{\varepsilon}\psi^{(n)}\right)_{,j}=f_i^{(n)};$$

(7.2) $$\left(K_{ij}^{\varepsilon}\psi_{,i}^{(n)}\right)_{,j}=g^{(n)},\quad i,j,k,l=\overline{1,3},\quad n=\overline{1,m}.$$

Индекс n здесь, как и ранее, означает соответствие данной величины n-му тестовому испытанию, т. е. n-й краевой задаче.

Система уравнений (7.1) содержит 27 неизвестных функций $C_{ijkl}^{\varepsilon}(\mathbf{x})$, $\beta_{ij}^{\varepsilon}(\mathbf{x})$. Система (7.2) —6 неизвестных функций $K_{ij}^{\varepsilon}(\mathbf{x})$. Эти системы можно значительно упростить при помощи специального выбора функций $\varphi_i^{(n)}$, $\psi^{(n)}$, которые в данном случае играют роль коэффициентов уравнений.

В качестве естественных граничных условий для систем (7.1), (7.2) можно взять, например, условия

(7.3) $$C_{ijkl}^{\varepsilon}(x_1,x_2,0)=0,\quad i,j,k,l=\overline{1,3};$$

(7.4) $$K_{ij}^{\varepsilon}(x_1,x_2,0)=0,\quad \beta_{ij}^{\varepsilon}(x_1,x_2,0)=0,$$

что соответствует предположению о совпадении искомых термоупругих характеристик с соответствующими известными характеристиками однородной изотропной термоупругой среды.

8. В качестве примера рассмотрим задачу диагностики в случае, когда априори известно, что среда является слабо неоднородной, но изотропной. Это предположение существенно сокращает число искомых характеристик. Их остается только четыре: λ^ε, μ^ε, β^ε, K^ε, так как для изотропной термоупругой среды

$$C^\varepsilon_{1111} = C^\varepsilon_{2222} = C^\varepsilon_{3333} = \lambda^\varepsilon + 2\mu^\varepsilon, \quad C^\varepsilon_{1212} = C^\varepsilon_{1313} = C^\varepsilon_{2323} = 2\mu^\varepsilon,$$

$$C^\varepsilon_{1112} = C^\varepsilon_{1113} = C^\varepsilon_{1123} = C^\varepsilon_{1223} = C^\varepsilon_{2213} = C^\varepsilon_{1323} = C^\varepsilon_{2212} = C^\varepsilon_{2223} = C^\varepsilon_{1213} = C^\varepsilon_{3313} =$$

$$= C^\varepsilon_{3312} = C^\varepsilon_{3323} = 0, \quad C^\varepsilon_{1122} = C^\varepsilon_{1133} = C^\varepsilon_{2233} = \lambda^\varepsilon, \quad \beta^\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\beta^\varepsilon, \quad K^\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}K^\varepsilon.$$

Уравнения (7.1), (7.2) в этом случае имеют вид

$$(8.1) \qquad [K^\varepsilon\psi^{(n)}_{,1}]_{,1} + [K^\varepsilon\psi^{(n)}_{,2}]_{,2} + [K^\varepsilon\psi^{(n)}_{,3}]_{,3} = g^{(n)},$$

$$n = \overline{1, m}, \quad \left[(\lambda^\varepsilon + 2\mu^\varepsilon)\,\varphi^{(n)}_{1,1} + \lambda^\varepsilon\left(\varphi^{(n)}_{2,2} + \varphi^{(n)}_{3,3}\right)\right]_{,1} + \left[\mu^\varepsilon\left(\varphi^{(n)}_{1,2} + \varphi^{(n)}_{2,1}\right)\right]_{,2} +$$

$$+ \left[\mu^\varepsilon\left(\varphi^{(n)}_{1,3} + \varphi^{(n)}_{3,1}\right)\right]_{,3} - (\beta^\varepsilon\psi^{(n)})_{,1} = f^{(n)}_1, \quad \left[\mu^\varepsilon\left(\varphi^{(n)}_{1,2} + \varphi^{(n)}_{2,1}\right)\right]_{,1} + \left[(\lambda^\varepsilon + 2\mu^\varepsilon)\,\varphi^{(n)}_{2,2} +\right.$$

$$\left. + \lambda^\varepsilon\left(\varphi^{(n)}_{1,1} + \varphi^{(n)}_{3,3}\right)\right]_{,2} + \left[\mu^\varepsilon\left(\varphi^{(n)}_{2,3} + \varphi^{(n)}_{3,2}\right)\right]_{,3} - (\beta^\varepsilon\psi^{(n)})_{,2} = f^{(n)}_2,$$

$$\left[\mu^\varepsilon\left(\varphi^{(n)}_{1,3} + \varphi^{(n)}_{3,1}\right)\right]_{,1} + \left[\mu^\varepsilon\left(\varphi^{(n)}_{2,3} + \varphi^{(n)}_{3,2}\right)\right]_{,2} + \left[(\lambda^\varepsilon + 2\mu^\varepsilon)\,\varphi^{(n)}_{3,3} +\right.$$

$$\left. + \lambda^\varepsilon\left(\varphi^{(n)}_{1,1} + \varphi^{(n)}_{2,2}\right)\right]_{,3} - (\beta^\varepsilon\psi^{(n)})_{,3} = f^{(n)}_3.$$

Будем определять только μ^ε. Для этого достаточно провести одно тестовое испытание, т. е. $n = 1$, в дальнейшем этот индекс будет опущен.

В качестве начальных условий возьмем

$$(8.2) \qquad \varphi_1 = x_3, \ \varphi_2 = 0, \ \varphi_3 = 0, \ \psi = 0.$$

Нетрудно видеть, что так подобранные φ_1, φ_2, φ_3, ψ удовлетворяют статическим уравнениям термоупругости для среды с постоянными термоупругими характеристиками. Подставляя (8.2) в (8.1), получим

$$(8.3) \qquad \mu^\varepsilon_{,3} = f_1, \quad \mu^\varepsilon_{,1} = f_3, \quad 0 = f_2, \quad 0 = g.$$

Поскольку из (8.1) мы получили четыре уравнения для определения одной функции μ^ε, то на функции f_1, f_2, f_3, g накладываются ограничения, следующие из самого вида уравнений (8.3): $f_{1,1} = f_{3,3}$, $f_2 \equiv 0$, $g \equiv 0$. Учитывая условия (7.3), которые в данном случае принимают вид $\mu^\varepsilon(x_1, x_2, 0) = 0$, получим

$$\mu^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \int\limits_0^{x_3} f_1(x_1, x_2, \eta)\, d\eta.$$

Физический смысл величины μ^ε требует, чтобы $\mu^0 + \mu^\varepsilon > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Романов В. Г.** Обратные задачи распространения сейсмических и электромагнитных волн.— В кн.: Методы решения некорректных задач и их приложения. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982.
2. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
3. **Гарипов Р. М., Кардаков В. Б.** Задача Коши для волнового уравнения с непространственным начальным многообразием.— ДАН СССР, 1973, т. 213, № 5.
4. **Резницкая К. Г.** Связь между решениями задачи Коши для уравнений различного типа и обратные задачи.— В кн.: Математические проблемы геофизики. Вып. 5, ч. 1. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1974.

Поступила 11/VII 1983 г.

УДК 622.026 + 650.834

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ВКЛЮЧАЮЩЕМ ПОГЛОЩАЮЩИЙ СЛОЙ

К. С. СУЛТАНОВ

(Ташкент)

В [1] предложена модель для горных пород и грунтов, учитывающая две предельные нелинейные диаграммы сжатия — статическую ($\dot{\varepsilon} \to 0$) и динамическую ($\dot{\varepsilon} \to \infty$), а также диаграммы, определяющие разгрузки среды. Эти диаграммы относятся