

УДК: 532.526

Порождение нестационарных вихрей Гёртлера локальными неоднородностями поверхности. Коэффициенты восприимчивости*

А.В. Иванов, Ю.С. Качанов, Д.А. Мищенко

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: kachanov@itam.nsc.ru

Проведено экспериментальное исследование механизма порождения нестационарных вихрей Гёртлера в пограничном слое на вогнутой стенке неоднородностями (вибрациями и неровностями) поверхности. Неоднородности создавались специально разработанным источником возмущений. Они были контролируемы, локализованными по продольной координате и периодическими по размаху экспериментальной модели. Исследования в малотурбулентной аэродинамической трубе показали, что источник является эффективным инструментом экспериментального изучения задач восприимчивости и устойчивости пограничного слоя с преобладанием неустойчивости Гёртлера. Его работа приводит к порождению нестационарных гёртлеровских вихрей малой амплитуды (десятые и сотые доли процента от скорости основного потока) с заданными параметрами: частотой и поперечной длиной волны. В работе экспериментально количественно изучена задача линейной восприимчивости пограничного слоя к неоднородностям поверхности в широком диапазоне частот для наиболее опасных поперечных масштабов гёртлеровских вихрей. Получены величины амплитуд и фаз коэффициентов восприимчивости. Амплитуды оказались значительно меньше, чем при возбуждении мод других типов гидродинамической неустойчивости (волн Толлмина–Шлихтинга и мод неустойчивости поперечного течения). Обнаружено, что амплитуды коэффициентов восприимчивости существенно растут с частотой, а для высоких частот — и с поперечным масштабом возмущений, хотя для стационарных неровностей поверхности влияния масштаба не наблюдается. Найдено, что частотные зависимости эффективности механизмов устойчивости и восприимчивости разнонаправлены, находятся в конкуренции и могут частично компенсировать друг друга, способствуя развитию в пограничном слое гёртлеровских вихрей широкого диапазона частот.

Ключевые слова: переход к турбулентности, восприимчивость, нестационарная неустойчивость Гёртлера, неоднородности поверхности.

Введение

В результате действия центробежных сил в пограничных слоях на искривленных поверхностях может возникнуть неустойчивость Гёртлера. Эта неустойчивость часто приводит к образованию продольных вихрей, которые могут нарастать вниз по течению, существенно изменять тепло- и массоперенос, влиять на сопротивление трения, приводить к турбулизации течений, а также влиять на другие параметры потока, существенные для многих технических устройств. Характеристики стационарной и нестационарной Гёртлеровской неустойчивости чрезвычайно важны для

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00109).

целого ряда аэродинамических устройств и элементов летательных аппаратов (например таких, как сопла двигателей, закрылки, предкрылки и другие изогнутые поверхности образцов авиационной техники).

Несмотря на большую практическую важность, неустойчивость Гёртлера до сих пор остается недостаточно изученной, главным образом из-за чрезвычайной сложности ее экспериментального исследования. Так, только совсем недавно, благодаря применению нового, нестационарного подхода, было получено согласование экспериментальных и расчетных характеристик линейной стационарной и нестационарной гёртлеровской неустойчивости [1]. В экспериментально-теоретической работе [1] для исследования неустойчивости Гёртлера был применен метод контролируемых нестационарных возмущений, который впервые позволил исследовать существенно нестационарные гёртлеровские вихри, а также на качественно новом уровне экспериментально изучить классические стационарные вихри Гёртлера (в квазистационарном приближении). Отстройка от нулевой частоты на практике дает возможность на порядки уменьшить амплитуды исследуемых возмущений и, вместе с тем, существенно увеличить точность измерений. Результаты работы [1] представляют собой основу для последующих исследований, в том числе для систематического изучения механизмов возбуждения нестационарных (в общем случае) вихрей Гёртлера различными внешними возмущениями.

Важность исследования этой задачи (задачи восприимчивости течений над искривленными поверхностями к внешним возмущениям с возбуждением вихрей Гёртлера) была осознана достаточно давно (см., например, работы [2–4]), но изучалась только теоретически и лишь для частного случая возбуждения стационарных вихрей Гёртлера неровностями поверхности [5, 6]. Экспериментальных количественных исследований проблемы гёртлеровской восприимчивости как для стационарных, так и для нестационарных возмущений ранее не проводилось и, соответственно, величин коэффициентов восприимчивости ранее получено не было, в том числе и для случая порождения вихрей неоднородностями обтекаемой поверхности. Решению именно этой задачи и посвящена настоящая экспериментальная работа.

Исследование задачи восприимчивости пограничного слоя к неровностям и вибрациям поверхности с использованием контролируемых нестационарных возмущений имеет ряд важных преимуществ, хотя, в то же время, сопряжено со множеством технических трудностей. В настоящей работе эти трудности были успешно преодолены за счет применения специально сконструированного источника возмущений, способного моделировать нестационарные (в общем случае), локализованные (по продольной потоку координате) неоднородности поверхности модели. Как показали эксперименты, такие неоднородности приводят к порождению в пограничном слое полностью контролируемых нестационарных гёртлеровских вихрей первой дискретной моды (т. е. наиболее опасных возмущений) с заданными параметрами: поперечной длиной волны, частотой и амплитудой. Порождаемые возмущения могут иметь очень малую амплитуду (десятые и сотые доли процента от скорости среднего потока), уверенно измеряться термоанемометром и, как показывает прямое сопоставление с расчетом, развиваться по законам линейной теории устойчивости.

Исследование в целом показало, что новый источник возмущений является эффективным инструментом изучения неустойчивости Гёртлера и, в частности, позволяет решить задачу о восприимчивости пограничного слоя на вогнутой стенке к ее локальным неоднородностям. Практическое применение разработанного источника впервые позволило экспериментально получить количественные характеристики восприимчивости, такие как комплексные (амплитуды и фазы)

коэффициенты восприимчивости, которые, будучи определены в фурье-пространстве, не зависят от конкретной формы неоднородностей поверхности. Полученные результаты могут быть напрямую использованы для верификации теорий восприимчивости течений с гёртлеровской неустойчивостью, а также для оценки начальных амплитуд гёртлеровских вихрей, возбуждаемых различными неоднородностями (неровностями или вибрациями) обтекаемой поверхности.

1. Экспериментальная модель и условия эксперимента

Эксперименты были проведены в малотурбулентной аэродинамической трубе Т-324 ИТПМ СО РАН при скорости свободного потока $U_e = 9,18$ м/с. В условиях данного эксперимента степень турбулентности в рабочей части трубы не превышала 0,02 % в частотном диапазоне выше 1 Гц.

Для проведения исследований была спроектирована и изготовлена высокоточная экспериментальная модель (схема ее расположения в аэродинамической трубе приведена на рис. 1.) Рабочая поверхность модели представляет собой вогнутую цилиндрическую поверхность (2) с радиусом закругления $R = 8,37$ м длиной 2,372 м и шириной (по размаху) 0,996 м. Строго фиксированную кривизну задает жесткий каркас из собранного в блок набора дюралюминиевых дугообразных нервюр (5). К каркасу притянута пластина из оргстекла толщиной 8 мм, пограничный слой на поверхности которой и является предметом исследования. Пластина имеет утонченную (до 3 мм) носовую часть с цилиндрической передней кромкой. Практически нулевой продольный градиент давления над рабочей поверхностью модели обеспечивается установленной над ней регулируемой ложной стенкой (4). Конструкция модели обеспечивает высокую степень постоянства кривизны обтекаемой поверхности на всем ее протяжении и, в то же время, позволяет минимизировать неконтролируемые неоднородности вогнутой стенки по размаху в опасном диапазоне волновых чисел.

Источник (3) нестационарных вихрей Гёртлера (его конструкция подробно описана в п. 3) был установлен заподлицо с поверхностью пластины на расстоянии 290,3 мм от передней кромки модели в центральной ее части по размаху. Локальное число Гёртлера $G^* = (U_e \delta^* / \nu) \sqrt{\delta^* / R}$ — основной параметр задачи гёртлеровской неустойчивости, в месте расположения источника составляло 8,16 (δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя, ν — кинематическая вязкость воздуха). Область основных измерений находилась в диапазоне продольных криволинейных

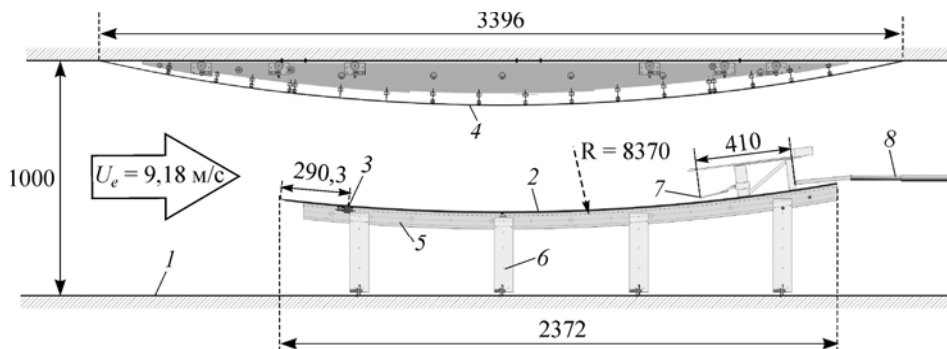


Рис. 1. Экспериментальная модель.

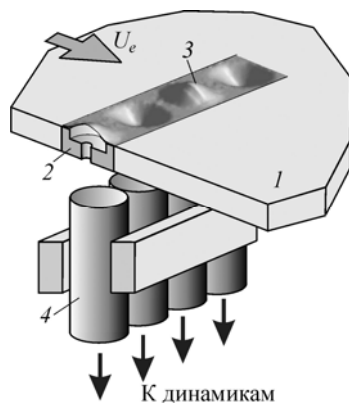
1 — поверхность рабочей части аэродинамической трубы, 2 — вогнутая поверхность экспериментальной модели, 3 — источник возмущений, 4 — ложная стенка, 5 — жесткий каркас из нервюр заданного радиуса закругления, 6 — несущие опоры, 7 — датчик термоанемометра, 8 — координатник.

(параллельных вогнутой поверхности) координат $x = 290 \div 1200$ мм ($G^* = 8,16 \div 24,72 \pm \pm 0,02$, см. п. 4). Продольные компоненты вектора средней скорости потока и возмущений скорости измерялись одноточечным датчиком термоанемометра (7). Он был установлен на трехкомпонентном координатнике (8), позволявшем позиционировать датчик в любой точке области измерений. Сигнал с выхода термоанемометра (как и сигналы платинового термометра сопротивления и электронного манометра, измерявших температуру и скорость потока) подавался на персональный компьютер синхронно с опорным сигналом источника возмущений через восьмиканальный BNC-2120 коннектор и 16-битный аналого-цифровой преобразователь PCI-6035E National Instruments.

Сбор экспериментальных данных и линеаризация сигнала термоанемометра осуществлялись с помощью компьютерных программ, реализованных в среде MATLAB с использованием констант закона Кинга. Эти константы получались в процессе тарировки датчика, которая проводилась в аэродинамической трубе периодически, непосредственно перед каждой серией измерений. Линеаризованный сигнал подвергался осреднению по ансамблю реализаций синхронно с опорным сигналом источника возмущений. Число осредненных периодов возбуждаемых гармонических возмущений варьировалось от 20 до 210, в зависимости от режима измерений. Частота дискретизации выбиралась с тем расчетом, чтобы обеспечить достаточно большое, всегда целое число точек на период генерируемого сигнала. В результате полученные сигналы были синхронизированы по времени и содержали как амплитудную, так и фазовую информацию. Затем эти сигналы подвергались фурье-преобразованию по времени с тем, чтобы получить амплитуды и фазы возмущений на основной частоте возбуждения f_1 (а также на частотах высших гармоник для контроля нелинейных эффектов). При дальнейшей обработке распределения амплитуд и фаз возмущений по размаху модели подвергались пространственному фурье-анализу с целью получения амплитуд и фаз мод частотно-волнового спектра. Скорость среднего потока измерялась в течение 10 ÷ 15 секунд в каждой точке пространства.

2. Конструкция источника возмущений

На рис. 2 схематически показано устройство основной части источника возмущений, вмонтированной в поверхность экспериментальной модели. Разработанный источник способен моделировать локальные неоднородности поверхности с заданными параметрами — поперечной длиной волны, частотой и амплитудой колебаний. Источник представляет собой ряд локализованных вибраторов в виде набора одинаковых эластичных, круглых мембран (3), сделанных из латексной пленки толщиной около 80 мкм и расположенных с фиксированным шагом вдоль размаха модели на предельно близком расстоянии друг от друга.



Во время экспериментов, мембраны возбуждаются с помощью блока из 8 заглушенных динамиков, который располагается вне рабочей части аэродинамической трубы. Динамики соединены с полостями под мембранами гибкими пневмотрассами (4) и создают пульсации давления, приводящие мембраны в колебательное

Рис. 2. Источник возмущений.

1 — поверхность модели, 2 — вставка, 3 — эластичные мембраны, 4 — пневмотрассы.

движение с амплитудами, составляющими несколько десятков микрон. Варьирование диаметра и шага мембран источника позволяет изменять поперечную длину волны неоднородностей поверхности и, как результат, вводимых возмущений. В настоящей работе использовались источники с диаметром мембран 4 и 6 мм, расположенных на минимальном расстоянии друг от друга. Во время экспериментов соседние мембраны колебались в противофазе, в результате источник моделировал периодические по размаху неоднородности поверхности модели с поперечными длинами волн $\lambda_z = 8$ и 12 мм соответственно. Возмущения с этими длинами волн имели поперечные волновые числа $\beta = 2\pi/\lambda_z = 0,785$ и $0,524$ рад/мм.

Эластичные мембраны были приклеены к несущей поверхности источника по технологии, которая обеспечивала: (а) равномерное, одинаковое для всего набора натяжение мембран и (б) изоляцию подмембранных камер друг от друга. В результате форма колебаний всех мембран была практически одинакова, с малым разбросом по амплитуде выгиба поверхности, что создавало однородный набор осцилляторов вдоль по размаху модели. Периодический характер формы неоднородностей по размаху (в виде стоячей волны) был выбран специально, чтобы обеспечить наиболее эффективное порождение периодических по размаху мод гёртлеровской неустойчивости пограничного слоя. Предполагалось, что разработанный источник будет порождать преимущественно первую (наиболее опасную) моду дискретного спектра задачи нестационарной гёртлеровской неустойчивости с заданной поперечной длиной волны и частотой. В то же время, примеси других мод (в том числе сплошного спектра) будут сравнительно слабы, обеспечивая малую протяженность ближнего поля источника, которое затрудняет исследования задачи восприимчивости (см. [1]).

Основываясь на предыдущем опыте использования подобных источников в аэродинамических трубах, в первоначальной схеме работы источника предусматривалась компенсация разницы статического давления над поверхностью мембран и давления под мембранами, т. е. в пневмотрассах, соединенных с динамиками, расположенными вне рабочей части аэродинамической трубы. Такая компенсация предотвращает смещение мембран от среднего положения за счет указанной разницы давлений при включении потока. Проведенные тесты показали, однако, что при данной скорости потока (9,18 м/с) и используемом материале мембран ожидаемое их смещение оказалось ничтожным и практически нефиксируемым. В итоге в основных режимах измерений в аэродинамической трубе (см. п. 4) эта компенсация не использовалась.

Подаваемый на каждый динамик гармонический сигнал (с определенной частотой, амплитудой и фазой) генерировался одним из восьми каналов электронной части источника, заимствованной из известного универсального источника возмущений ВС-II, который широко применяется для изучения различных типов гидродинамических неустойчивостей. (В отличие от источника, используемого в данном эксперименте, ВС-II создает в пограничном слое возмущения типа вдува/отсоса. Его конструкция подробно описана в работе [7].) Электронная часть источника была снабжена специальным аналого-цифровым преобразователем, совмещенным с усилителем мощности. Каждый канал был способен генерировать свой собственный, независимый электрический сигнал (практически любой желаемой формы) из 2048 точек, записанный из компьютера в цифровую память источника. В настоящем эксперименте сигналы были синусоидальными. Они многократно проигрывались в процессе возбуждения мод неустойчивости с необходимой частотой, задаваемой внешним генератором.

В результате моделируемые источником периодические по времени, нестационарные, локализованные по продольной координате неоднородности поверхности имели вид чередующихся по размаху (координате z) холмов и впадин

(рис. 2), осциллирующих по времени по гармоническому закону с малой амплитудой, составляющей несколько десятков микрон. Как показали измерения в пограничном слое, описанный источник действительно позволяет возбуждать нестационарные вихри Гёртлера первой моды неустойчивости с заданной частотой и поперечной длиной волны. При этом примесь возмущений других мод частотно-волнового спектра оказалась очень мала. Более подробно результаты измерений описаны ниже в п. 5 и 6.

3. Определение коэффициентов восприимчивости

Следуя предыдущим работам (см. [8], а также обзор [9]), для фиксированных параметров потока и геометрии модели в общем случае можно определить комплексную функцию восприимчивости

$$\bar{G}_r(\beta, f) = G_r(\beta, f) \exp[i\varphi_r(\beta, f)] \quad (1)$$

(где G_r и φ_r — действительные амплитуда и фаза восприимчивости) как отношение

$$\bar{G}_r(\beta, f) \stackrel{df}{=} \bar{B}_0(\beta, f) / \tilde{C}_s(\beta, f) \quad (2)$$

двух функций: комплексной амплитуды частотно-волнового спектра возбужденных мод неустойчивости пограничного слоя в положении источника

$$\bar{B}_0(\beta, f) = B_0(\beta, f) \exp(i\phi_0(\beta, f)) \quad (3)$$

(где $B_0(\beta, f)$ и $\phi_0(\beta, f)$ — действительные величины амплитуд и фаз) и резонансных мод неустойчивости комплексного частотно-волнового спектра вибраций поверхности:

$$\tilde{C}_s(\beta, f) = \tilde{C}_s(\beta, f) \exp(i\tilde{\lambda}_s(\beta, f)) \quad (4)$$

(где \tilde{C}_s — действительная спектральная амплитуда, а $\tilde{\lambda}_s$ — действительная спектральная фаза) с резонансным возбужденной моде продольным волновым числом, соответствующим дисперсионному соотношению для нестационарных гёртлеровских вихрей первой дискретной моды $\tilde{\alpha}_r = \tilde{\alpha}_r(\beta, f)$. (Здесь и ниже символы “ df ” над знаком равенства означают равенство по определению.) Иными словами, резонансный спектр вибраций поверхности определяется компонентами трехмерного частотно-волнового спектра вибраций

$$\bar{C}_s(\beta, \alpha_r, f) = C_s(\beta, \alpha_r, f) \exp[i\lambda_s(\beta, \alpha_r, f)], \quad (5)$$

отобранными только для продольных волновых чисел $\tilde{\alpha}_r(\beta, f)$, определяемых из дисперсионного соотношения.

Для действительных амплитуд и фаз коэффициента восприимчивости определение (2) удобно представить в виде:

$$G_r(\beta, f) \stackrel{df}{=} B_0(\beta, f) / \tilde{C}_s(\beta, f), \quad (6)$$

$$\varphi_r(\beta, f) \stackrel{df}{=} \phi_0(\beta, f) - \tilde{\lambda}_s(\beta, f). \quad (7)$$

Выражение (6) определяет амплитудную часть коэффициента восприимчивости, которая описывает эффективность порождения вихрей Гёртлера вибрациями поверхности. Фазовая часть (7) определяет фазовую задержку между колебаниями поверхности и возбужденным вихрем.

Источник возмущений моделирует периодические по трансверсальной координате z неоднородности поверхности, которые приводят к порождению в пограничном слое волны неустойчивости с поперечной длиной волны λ_z . В результате спектр моделируемых неоднородностей и спектр возмущений в пограничном слое являются дискретными по поперечному волновому числу β и для возбуждаемой в потоке системы осциллирующих гёртлеровских вихрей состоят преимущественно из пары гармоник с волновыми числами $\pm \beta_1$. Именно для этих волновых чисел в настоящей работе и получены величины коэффициентов восприимчивости.

В приведенных выше выражениях модуль поперечного волнового числа β и частота f являются свободными параметрами экспериментального исследования, а начальные амплитуды возбужденных мод Гёртлера $\bar{B}_0(\beta, f)$ и резонансные гармоники неоднородностей поверхности $\bar{C}_s(\beta, f)$ должны быть определены в экспериментах для каждого исследованного β и f . (Экспериментальные величины \bar{B}_0 и \bar{C}_s обезразмерены на U_e и δ^* соответственно)

4. Параметры пограничного слоя и режимы измерений

Измерения показали, что характеристики среднего потока над экспериментальной моделью практически не зависят от поперечной координаты z , т. е. исходное течение является практически двумерным. Благодаря тщательно подобранной форме адаптивной ложной стенки в условиях эксперимента было реализовано течение с практически нулевым продольным градиентом давления. Для достижения максимальной точности измерений распределения средней скорости вдоль границы пограничного слоя была применена специальная процедура коррекции показаний датчика термоанемометра. Эта процедура включает в себя определение и учет даже очень малых изменений скорости, связанных как со слабой квазистационарной модуляцией скорости набегающего потока во времени, так и со слабым изменением скорости основного течения вследствие изменения полного гидродинамического сопротивления рабочей части, связанного с перемещениями координатника.

Коррекция показаний датчика производилась следующим образом. Скорость набегающего потока постоянно измерялась на входе рабочей части аэродинамической трубы электронным датчиком давления по перепаду статического давления в форкамере и рабочей части трубы. Полученная величина скорости использовалась затем для перенормировки средней скорости, измеренной в каждой пространственной точке датчиком термоанемометра. Эта коррекция позволяла фактически исключить влияние любой медленной модуляции скорости набегающего потока на измеренные распределения средней скорости.

В результате в области основных измерений пограничный слой соответствовал пограничному слою Блазиуса, включая как форму профиля, так и его интегральные характеристики: толщину вытеснения δ^* , толщину потери импульса δ^{**} и формпараметр $H = \delta^*/\delta^{**}$ (рис. 3).

Поскольку в условиях эксперимента на экспериментальной модели толщина вытеснения пограничного слоя δ^* нарастает в изучаемой области с 1,14 до 2,39 мм, то локальное число Гёртлера G^* меняется с 8,16 до 24,72. (Определенное по δ^* осредненное по всем исследованным режимам число Рейнольдса $Re^* = 700 \div 1465$.)

При конструировании модели и проведении экспериментов такие умеренные значения числа Гёртлера были выбраны специально, для того чтобы избежать чрезмерно быстрого роста неконтролируемых стационарных вихрей Гёртлера, которые могут породиться естественными (т. е. неконтролируемыми) возмуще-

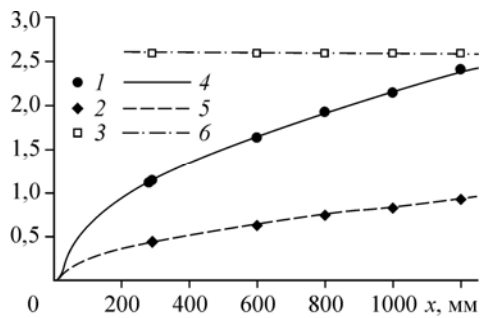


Рис. 3. Сравнение интегральных характеристик пограничного слоя экспериментальной модели (1 — δ^* , мм; 2 — δ^{**} , мм; 3 — H) с теоретическими данными для пограничного слоя Блазиуса (4, 5, 6).

ниями поверхности модели и набегающего потока. Тем не менее, как показали исследования, выполненные во время основных измерений при смонтированном на модели источнике возмущений такие неконтролируемые вихри все же регистрировались в конце области измерений. Их присутствие проявлялось в искажении профилей средней скорости, измеренных по размаху модели на расстоянии от стенки, соответствующем $U/U_e = 0,6$ (именно на таком расстоянии гёртлеровские вихри имеют максимальную интенсивность). Форма и амплитуда искажений измеренных профилей не зависела от режима работы источников. Таким образом, появление естественных возмущений в эксперименте связано, по-видимому, с качеством заделки источника в поверхность модели. Среднеквадратичное отклонение, рассчитанное для поперечных профилей средней скорости, представляет собой оценку амплитуд неконтролируемых вихрей. Оно составляет 2,3 и 1,4 % для режимов с применением источников с диаметрами мембран 4 и 6 мм соответственно. Как показывают результаты работы [10], порог нелинейности для нестационарных вихрей Гёртлера составляет $4 \div 6$ %, таким образом, интенсивность естественных возмущений в условиях проведенных экспериментов можно считать вполне умеренной.

Амплитуды возбуждаемых в пограничном слое контролируемых волн неустойчивости составляли десятые и сотые доли процента от скорости среднего потока (см. п. 6). Измеренные в экспериментах кривые нарастания и нормальные стенке профили исследуемых возмущений хорошо согласуются с расчетами, выполненными по линейной теории устойчивости (см. п. 5 и 6). Таким образом, можно сделать вывод, что неконтролируемые стационарные вихри действительно не влияли на развитие исследуемых контролируемых возмущений.

Одной из целей экспериментов в аэродинамической трубе являлась принципиальная проверка способности созданного типа источника порождать в пограничном слое нестационарные вихри Гёртлера с амплитудами, достаточными для уверенного измерения их характеристик. В результате в работе были использованы источники, моделирующие локальные неоднородности с поперечной длиной волны $\lambda_z = 8$ и 12 мм. Соответствующие таким неоднородностям волны неустойчивости пограничного слоя (вихри Гёртлера) с безразмерной поперечной длиной волны $\Lambda = (U_e \lambda_z / \nu) \cdot (\lambda_z / R)^{1/2} = 152$ и 280 близки к наиболее быстрорастущим вниз по потоку. Эксперименты были проведены для неоднородностей с частотами колебания в диапазоне $f_1 = 2 \div 14$ Гц. Этим размерным частотам соответствуют безразмерные частотные параметры $F = 2\pi f_1 \nu / U_e \cdot 10^6 = 2,22 \div 15,55$.

5. Порождаемые в пограничном слое контролируемые возмущения

На рис. 4 показан типичный профиль амплитуд и фаз возмущений продольной компоненты скорости по размаху модели, измеренный в пограничном слое в конце изучаемой области (в дальнем поле источника возмущений). Измерения выполнены на расстоянии $y_{\max} = \text{const}$ от стенки, соответствующем среднему

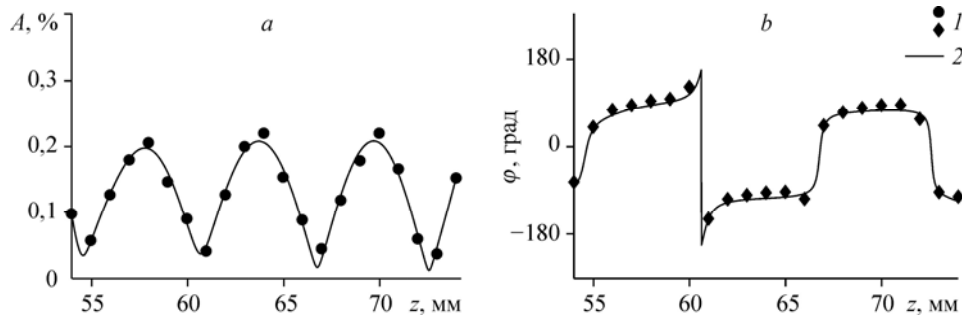


Рис. 4. Типичный профиль возмущений, измеренный в пограничном слое по размаху модели в дальнем поле источника: *a* — амплитуды, *b* — фазы.

$\Lambda = 280, F = 8,87, G^* = 24,72, x = 1200$ мм. 1, 2 — эксперимент, 3 — аппроксимация полиномом 10-й степени в плоскости комплексных амплитуд.

значению безразмерной скорости потока $U/U_e = 0,6$. Именно здесь, как показали исследования (и результаты работы [1]), продольная компонента пульсаций скорости имеет максимум.

Возмущения соответствуют стоячей волне (по размаху модели) с заданными параметрами: поперечным волновым числом и частотой, что весьма характерно для нестационарных вихрей Гёртлера [1]. Они представляют собой суперпозицию двух основных фурье-мод ($f_1, +\beta_1$) и ($f_1, -\beta_1$) частотно-волнового спектра пульсаций скорости с малой примесью других гармоник фурье-спектра с поперечными волновыми числами $\pm 2\beta_1$ и $\pm 3\beta_1$, где $\beta_1 = 2\pi/\lambda_z$ задано шагом мембран источника возмущений ($\beta_1 = 0,785$ и $0,524$ рад/мм для $\lambda_z = 8$ и 12 мм соответственно). Этот результат говорит, в частности, о том, что формы и амплитуды колебаний мембран созданного источника возмущений мало отличаются друг от друга.

Измерения, выполненные на частоте второй частотной гармоники возмущений ($f_2 = 2f_1$), которые проводились для контроля степени нелинейности работы источника и развития возмущений, показали практически полное отсутствие возмущений на этой частоте.

Характерные профили амплитуд и фаз возмущений, измеренные по нормали к стенке в максимуме амплитуд по поперечной координате, показаны на рис. 5. Как и распределения, представленные на рис. 4, они были получены в конце области измерений — в дальнем поле источника возмущений. Расчеты выполнялись по линейной (нелокальной) непараллельной теории (ЛНТ) и по линейной локально-

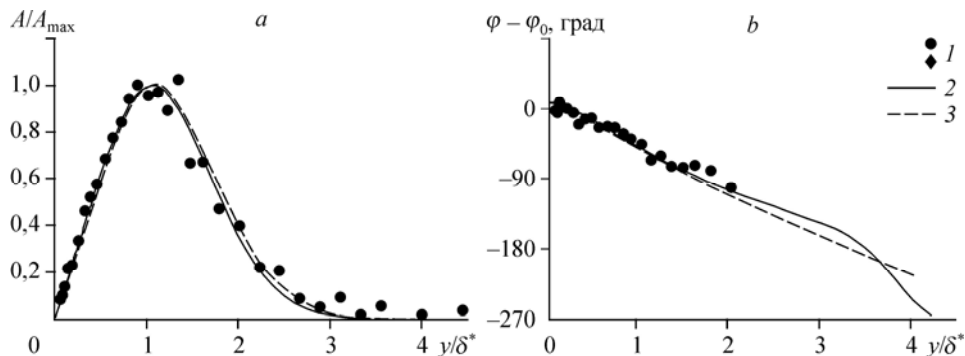


Рис. 5. Характерный профиль возмущений, измеренный по нормали к стенке: *a* — амплитуды, *b* — фазы.

$\Lambda = 280, F = 8,87, G^* = 24,72, x = 1200$ мм, $z = 70$ мм. 1 — эксперимент, 2 — ЛНТ, 3 — ЛПТ.

параллельной теории (ЛПТ) по программам А.В. Бойко [1]. Как видно из рис. 5, экспериментальные профили амплитуд и фаз возмущений хорошо согласуются с расчетами и соответствуют собственным функциям первой моды дискретного спектра задачи нестационарной неустойчивости Гёртлера. Это в первую очередь означает, что работа источника действительно приводит к эффективному порождению в пограничном слое возмущений, которые представляют собой именно первую, наиболее опасную моду гёртлеровской неустойчивости.

6. Развитие мод неустойчивости в пограничном слое. Линейность задачи

Во всех исследованных режимах возбуждения нестационарных гёртлеровских вихрей в различных положениях по продольной координате x были измерены наборы профилей амплитуд и фаз возмущений продольной компоненты скорости по размаху модели. Один из таких профилей показан на рис. 4. Все измерения были выполнены на постоянном расстоянии от стенки y_{\max} , которое соответствует $U/U_e = 0,6$ — именно на этом расстоянии, как показывают исследования (см. [1]), находится максимум амплитуд собственных функций гёртлеровских вихрей первой дискретной моды. Пространственное преобразование Фурье таких профилей позволило получить амплитуды и фазы мод частотно-волнового спектра и построить кривые нарастания амплитуд и фаз основной из этих мод ($f_1, \pm \beta_1$) с заданным модулем поперечного волнового числа β_1 . (Другие частотно-волновые гармоники спектра возмущений имели очень малые, практически нулевые амплитуды).

Характерные примеры таких кривых нарастания, полученных для порождаемых в пограничном слое вихрей с безразмерными поперечными длинами волн $\Lambda = 152$ и 280 , приведены на рис. 6 и 7. Суммы амплитуд гармоник ($f_1, +\beta_1$) и ($f_1, -\beta_1$), соответствующие амплитудам гёртлеровских вихрей, приведены в логарифмическом масштабе, в процентах от скорости свободного потока, фазы в градусах.

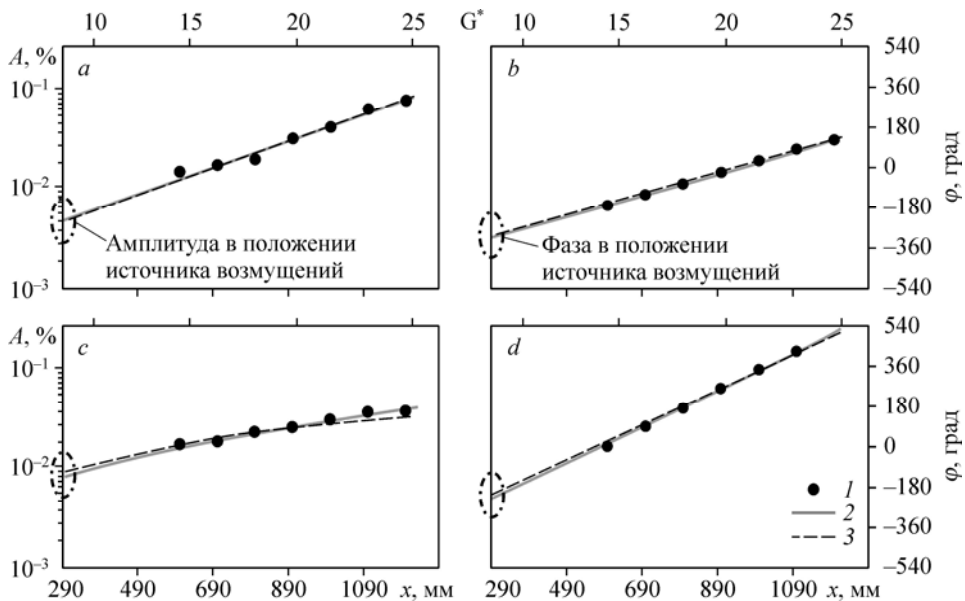


Рис. 6. Кривые нарастания амплитуд (слева) и фаз (справа) нестационарных вихрей Гёртлера. $\Lambda = 152, F = 8,87$ (a, b), $15,55$ (c, d), $U/U_e = 0,6$.

1 — эксперимент, 2 — ЛНТ, 3 — ЛПТ.

Расчетные кривые сшиты по методу наименьших квадратов с экспериментальными данными. Сверху показана вторая, дополнительная шкала — локальные числа Гёртлера. На рис. 7 дополнительно светлыми символами показаны кривые нарастания гёртлеровских вихрей, оцененные по другой методике. Амплитуды возмущений в этом случае получены без пространственного фурье-анализа путем прямого измерения распределений по продольной координате x , когда датчик термоанемометра перемещался вниз по потоку вдоль одного из амплитудных максимумов возмущений в распределениях по размаху модели (при $z \approx 70$ мм, см. рис. 4).

Порождаемые в пограничном слое нестационарные гёртлеровские вихри имеют малую амплитуду, которая составляет десятые ($\Lambda = 280$, рис. 7) и сотые ($\Lambda = 152$, рис. 6) доли процента. Существенное отличие характерных амплитуд возмущений, возбуждаемых источниками с разными поперечными длинами волн, связано, в первую очередь, с существенным различием амплитуд колебаний мембран источников в этих режимах.

Амплитуды мод неустойчивости, возбуждаемых вибрациями поверхности, оказались сравнительно невелики. Было замечено также, что уменьшение частоты колебания неоднородностей поверхности до $f_1 = 2 \div 5$ Гц сопровождается снижением эффективности генерации мод неустойчивости в пограничном слое. В некоторых из этих режимов вихри Гёртлера достигали достаточных для точного измерения амплитуд лишь в конце области измерений.

Из рис. 6 и 7 видно, что в условиях эксперимента вихри Гёртлера развиваются по законам линейной теории устойчивости. При этом обе теории примерно одинаково хорошо описывают экспериментальные кривые, хотя непараллельная теория согласуется с экспериментом несколько лучше. Эти результаты, полученные с использованием новой экспериментальной модели и нового источника возмущений, независимо подтверждают данные, полученные ранее в работах [1] и [10].

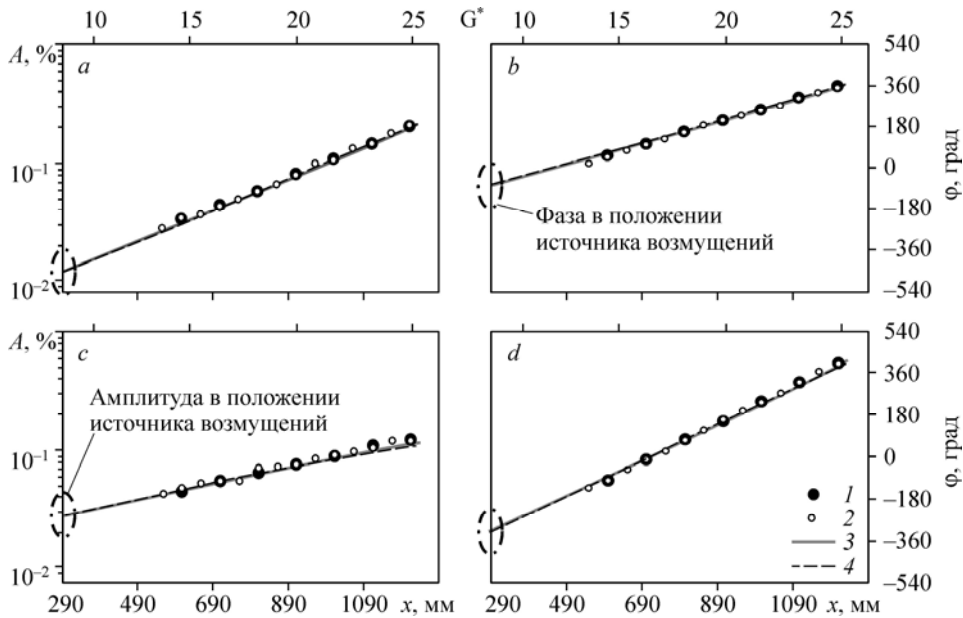


Рис. 7. Кривые нарастания амплитуд (a, c) и фаз (b, d) нестационарных вихрей Гёртлера. $\Lambda = 280, F = 8,87$ (a, b), $15,55$ (c, d), $U/U_e = 0,6$.

Экспериментальные данные: 1 — полученные в результате Фурье-обработки поперечных профилей амплитуд и фаз, 2 — непосредственно измеренные вдоль продольной координаты распределения ($z \approx 70$ мм); 3 — ЛНТ, 4 — ЛПТ.

Экспериментальные кривые нарастания (амплитуды и фазы), полученные в результате фурье-анализа поперечных профилей пульсаций и непосредственно измеренные в пограничном слое, практически совпадают друг с другом (рис. 7). Этот факт подтверждает сделанный ранее вывод о том, что набор мембран источника весьма однороден, формы и амплитуды колебаний всех мембран мало отличаются друг от друга, в результате частотно-волновой спектр генерируемых в пограничном слое возмущений содержит преимущественно две симметричных частотно-волновых гармоники: $(f_1, -\beta_1)$ и $(f_1, +\beta_1)$, а примесь других гармоник незначительна.

Хорошее согласование экспериментальных кривых и расчетов, выполненных по линейной теории, говорит также о том, что источник генерирует преимущественно первую дискретную моду неустойчивости Гёртлера, являющуюся основным предметом исследования, и мало других мод. Благодаря этому протяженность ближнего поля созданного источника оказывается небольшой, и практически вся область измерений соответствует дальнему полю источника, измерения в котором можно корректно использовать для определения характеристик исследуемых механизмов устойчивости и восприимчивости.

Учитывая все вышесказанное, можно заключить, что разработанный на основе сконструированного источника возмущений метод введения возмущений оказался весьма удачным. Он позволяет возбуждать нестационарные вихри Гёртлера малой амплитуды и эффективно исследовать характеристики гёртлеровской неустойчивости, а также решить задачу восприимчивости пограничного слоя на вогнутой стенке к неоднородностям поверхности и в итоге получить соответствующие коэффициенты восприимчивости (см. п. 9).

В настоящей работе была проведена проверка линейности исследуемых механизмов восприимчивости и устойчивости пограничного слоя. Амплитуда локальных неоднородностей в этих измерениях была уменьшена примерно в два раза по сравнению с амплитудами, использовавшимися в основных измерениях. (В этих режимах изменение амплитуд неоднородностей поверхности контролировалась лазерным измерителем смещений.) Соответствующие измерения в потоке показали, что порожденные в пограничном слое нестационарные вихри Гёртлера имели те же характеристики (включая форму собственных функций), а их амплитуды уменьшились точно пропорционально понижению амплитуд вибраций поверхности. Эти тесты подтвердили отсутствие нелинейных механизмов при порождении контролируемых вихрей (линейность задачи восприимчивости) в условиях эксперимента, а следовательно полученные в работе результаты могут использоваться для верификации линейных теорий восприимчивости.

7. Оценка начальных амплитуд и фаз вихрей Гёртлера

Вследствие присутствия вблизи источника возмущений так называемого ближнего поля (см., например, [1]), в котором доминируют возмущения сплошного спектра, начальные комплексные амплитуды нестационарных (дискретных мод) вихрей Гёртлера $\bar{B}_0(\beta, f)$ не могут быть получены путем проведения прямых измерений непосредственно над источником. Хорошее согласование экспериментальных и теоретических (в рамках обеих теорий) кривых нарастания амплитуд и фаз, возбуждаемых в пограничном слое гёртлеровских вихрей, позволяет применить аппроксимацию экспериментальных распределений теоретическими кривыми для нахождения начальных амплитуд B_0 и фаз ϕ_0 вихрей в положении центра источника (обведенного на рис. 6, 7 штрих-пунктирной линией).

Как было обнаружено из множественных сравнений, проведенных в предшествующих работах [1] и [10], обе теории, как нелокальная непараллельная (ЛНТ), так и локальная параллельная (ЛПТ), дают очень похожие результаты при оценке роста амплитуд вихрей. Однако при сравнении фазовых скоростей ЛНТ обычно лучше согласуется с измерениями. Как показывают рис. 5–7, в области параметров, исследованной в данных экспериментах, преимущество ЛНТ в целом незначительно, и для увеличения надежности результатов в настоящей работе были использованы обе теории для оценки комплексных начальных амплитуд вихрей Гёртлера, a , соответственно, и коэффициентов восприимчивости. (Благодаря сравнению коэффициентов восприимчивости, полученных с применением разных подходов, можно составить более правильное представление о точности полученных результатов.)

Как уже было отмечено (п. 6), в проведенных экспериментах возбуждение нестационарных гёртлеровских вихрей на низких частотах вибраций поверхности происходило заметно менее эффективно, чем на высоких частотах. В таких низкочастотных режимах вихри Гёртлера имели очень маленькие амплитуды почти во всей области измерений и нарастали до надежно измеряемых амплитуд лишь очень далеко от источника — в самом конце области измерений. Однако для применения описанной процедуры экстраполяции на источник с помощью теоретически рассчитанных кривых нарастания было достаточно иметь всего лишь несколько, или даже одну экспериментальную точку. Во многих режимах с низкой частотой возмущения была применена именно такая методика.

8. Форма неоднородностей поверхности. Резонансный спектр вибраций

Для решения задачи восприимчивости пограничного слоя к неоднородностям поверхности (см. п. 3) необходима точная информация об их форме. Форма колеблющихся мембран источника была тщательно промерена высокоточным лазерным измерителем смещений *ortho*NCDT-1605 в каждом из режимов возбуждения возмущений. Подробные измерения были проведены для обоих используемых в эксперименте источников с поперечной длиной волны 8 и 12 мм с шагом 20 и 25 мкм соответственно, как по продольной, так и по поперечной координате.

На рис. 8, *a*, *b* приведена характерная мгновенная форма периодических по поперечной координате неоднородностей поверхности, создаваемых источниками с поперечными длинами волн $\lambda_z = 8$ и 12 мм соответственно ($f_1 = 11$ Гц). Как показали измерения, колеблющиеся мембраны источников, изготовленных по оригинальной технологии, имеют правильную осесимметричную форму и практически идентичны друг другу. Форма колебаний не зависит от частоты в исследованном диапазоне частот.

На рис. 8, *c*, *d* показаны амплитудные части двумерных фурье-спектров колебаний мембран источников в пространстве безразмерных продольных и поперечных волновых чисел. Они представляют собой ряд дискретных гармоник по поперечному волновому числу β , в то время как по продольному волновому числу α , спектры вибраций являются сплошными. Наибольшие амплитуды в спектре имеют неоднородности поверхности с модулем поперечного волнового числа β_1 , соответствующем периоду мембран по размаху модели, хотя в спектре присутствуют также моды с удвоенными и утроенными поперечными волновыми числами. Высшие гармоники имеют значительно меньшую амплитуду, чем основные моды спектра, и, как показали измерения в пограничном слое, не приводят к генерации гёртлеровских вихрей измеримых амплитуд.

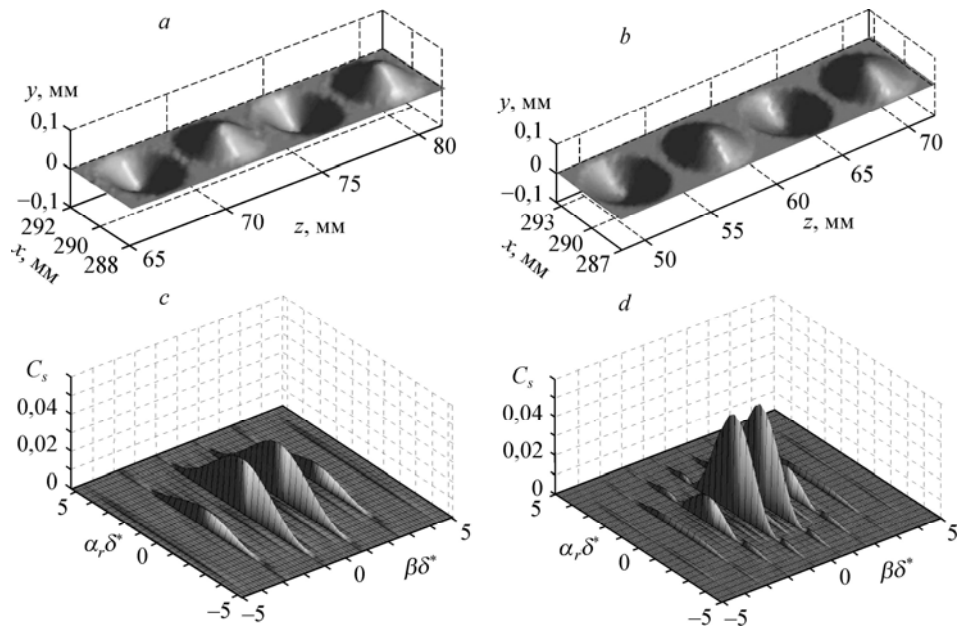


Рис. 8. Мгновенная картина поверхности колеблющихся мембран (четыре из всего набора) в пространстве (x, z) двух применяемых в эксперименте источников $\lambda_z = 8$ (a), 12 (b) мм. Соответствующие двумерные амплитудные части спектров вибраций поверхности в пространстве безразмерных волновых чисел — c, d. $f_1 = 11$ Гц.

В целом, как видно из рис. 8, c, d, спектр формы колебаний контролируемых неоднородностей поверхности по продольным волновым числам α_r достаточно богат. Однако из всех гармоник этого спектра только резонансные моды, т. е. моды, соответствующие продольным волновым числам $\tilde{\alpha}_r$ гёртлеровских вихрей для данной частоты (f) и данной абсолютной величины поперечного волнового числа (β_1), ответственны за процесс порождения вихрей Гёртлера.

Процедура отбора резонансных мод в спектре неоднородностей поверхности проиллюстрирована на рис. 9, где приведены комплексные спектры моделируемых источником вибраций по продольным волновым числам, определенные для поперечных волновых чисел $\pm \beta_1$. (Спектры на рис. 9 соответствуют двум главным лепесткам в двумерных спектрах вибраций, приведенных на рис. 8.) Спектральные амплитуды показаны на рисунках a, b; фазы — на рисунках c, d. Сплошной и пунктирной линией изображены наборы симметричных гармоник с волновыми числами противоположных знаков (как видно, они практически совпадают, что говорит об однородности формы источника по размаху модели). Амплитуды имеют колоколообразную форму с максимумами при $\alpha_r = 0$. Фазы для гармоник со значимыми амплитудами мало меняются с продольным волновым числом.

Положение резонансных мод (с продольными волновыми числами $\tilde{\alpha}_r (\pm \beta_1) \delta^* = 0,01172$ и $0,01165$) отмечено на рис. 9 вертикальными пунктирными линиями, а точками отмечены искомые значения амплитуд резонансных гармоник \tilde{C}_s и их фаз $\tilde{\lambda}_s$. Необходимые значения продольных волновых чисел $\tilde{\alpha}_r$ гёртлеровских вихрей, соответствующих дисперсионному соотношению в положении источника, были оценены из продольных фазовых распределений (см. рис. 6, 7, b, d) в каждом из режимов измерений. Несмотря на то, что на рис. 9 показаны данные, соответствующие

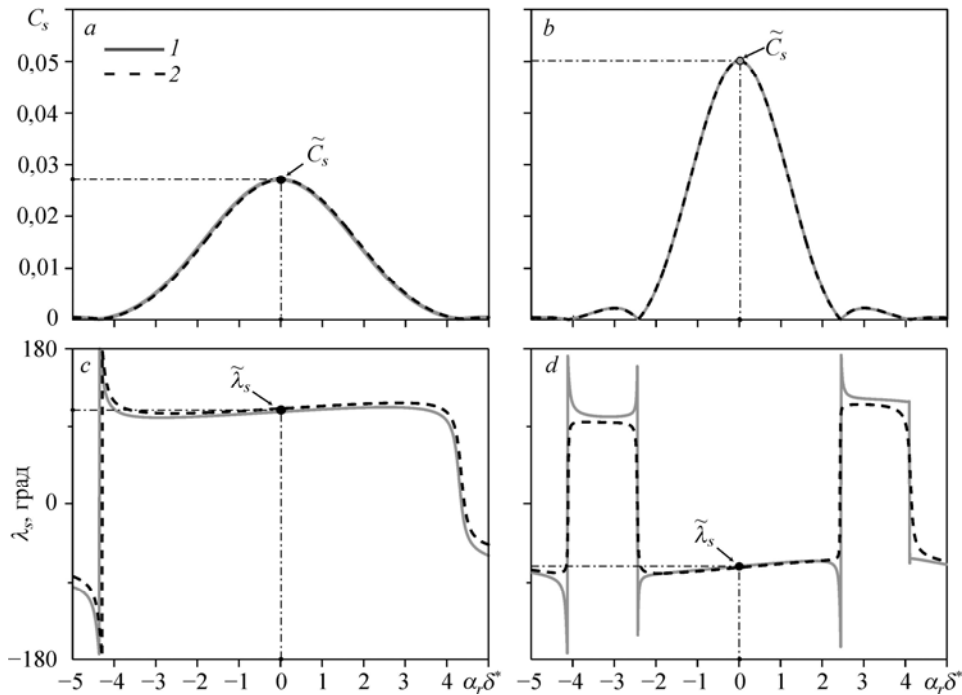


Рис. 9. Спектры амплитуд (*a, b*) и фаз (*c, d*) вибраций поверхности источников с $\lambda_z = 8$ (*a, c*) и 12 (*b, d*) мм по продольному безразмерному волновому числу α_r , полученные для основных поперечных волновых чисел $\pm \beta_1$. Сплошные и пунктирные жирные линии — спектры симметричных гармоник с поперечными волновыми числами противоположных знаков. Вертикальные пунктирные линии и точки — положения резонансных мод вибраций поверхности при частоте возмущений $f = 11$ Гц. β_1 (1), $-\beta_1$ (2).

существенно нестационарному режиму генерации вихрей ($f = 11$ Гц), можно видеть, что значения продольных волновых чисел остаются достаточно малыми (хотя и не равными нулю, как у стационарных вихрей Гёртлера).

Найденные таким образом значения резонансных спектральных амплитуд и фаз в фурье-спектре колебаний поверхности \tilde{C}_s и $\tilde{\lambda}_s$ вместе с определенными в предыдущем параграфе начальными амплитудами и фазами возбуждаемых гёртлеровских вихрей B_0 и ϕ_0 позволяют получить основной результат этой работы — комплексные коэффициенты восприимчивости пограничного слоя на вогнутой стенке к локальным неоднородностям поверхности при прохождении вихрей Гёртлера (см. формулы (6) и (7) п. 3).

9. Коэффициенты восприимчивости

Результаты определения амплитуд и фаз коэффициентов восприимчивости пограничного слоя к неоднородностям поверхности представлены на рис. 10 для 2-х исследованных поперечных длин волн $\lambda_z = 8$ ($\Lambda = 152$) и $\lambda_z = 12$ мм ($\Lambda = 280$) в зависимости от частоты возмущения. Сверху приведена дополнительная шкала — частотные параметры волн неустойчивости пограничного слоя F . Символами показаны коэффициенты восприимчивости, полученные в соответствии с определением п. 3, на частотах генерации вихрей 2, 5, 7, 11 и 14 Гц (разные типы символов соответствуют коэффициентам, полученным с привлечением ЛНТ или ЛПТ

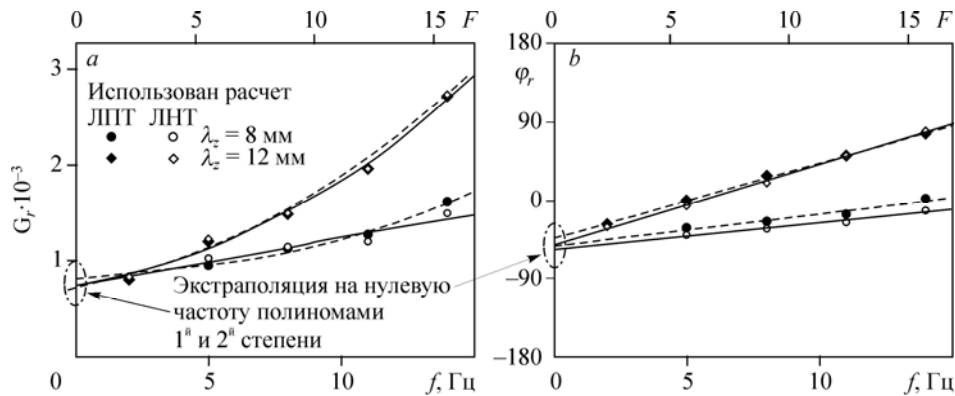


Рис. 10. Амплитуды (а) и фазы (б) коэффициентов восприимчивости пограничного слоя на вогнутой стенке к неоднородностям поверхности в зависимости от частоты возмущений.

Символы — эксперимент, линии — аппроксимация и экстраполяция экспериментальных значений на нулевую частоту с помощью полиномов второй (а) и первой (б) степени.

при оценке начальных комплексных амплитуд). Линии показывают аппроксимацию амплитуд восприимчивости полиномами 1-й и 2-й степени, а фаз восприимчивости — прямыми линиями. Как видно из рисунка, отличие амплитуд коэффициентов, полученных с привлечением двух разных теорий устойчивости, невелико (не более $\pm 1\%$ для $\lambda_z = 12$ мм и $\pm 2,5\%$ для $\lambda_z = 8$). Различия в фазах восприимчивости также мало.

Коэффициенты восприимчивости к вибрациям поверхности получены в настоящей работе в достаточно широком диапазоне частот, включая очень низкие, что позволяет получить достаточно надежные оценки коэффициентов восприимчивости и к стационарным неоднородностям поверхности ($f = 0$), т. е. к неровностям. Такие оценки можно сделать с помощью экстраполяции полученных коэффициентов на нулевую частоту указанными полиномами. (Подобная процедура уже успешно применялась и верифицировалась ранее в работе [8] для случая возбуждения неоднородностями поверхности мод неустойчивости поперечного течения). Результаты таких оценок представлены на рис. 10, а, б значениями, находящимися на оси $f = 0$.

Амплитуды коэффициентов восприимчивости, в целом, оказались сравнительно невелики (рис. 10, а). Так, например, оцененная восприимчивость пограничного слоя к неоднородностям поверхности при возбуждении стационарных вихрей Гёртлера оказывается в $2 \div 3$ раза ниже, чем при возбуждении волн неустойчивости поперечного течения на скользящем крыле [8], и на порядок ниже волн Толлмина–Шлихтинга [11]. Изменение поперечной длины волны вихрей Гёртлера слабо отражается на коэффициентах восприимчивости стационарных возмущений, но существенно влияет на коэффициенты, соответствующие порождению нестационарных гёртлеровских вихрей.

Характер зависимости амплитуд и фаз восприимчивости от частоты весьма типичен для коэффициентов, полученных ранее в исследованиях соответствующих задач о возбуждении мод других типов гидродинамической неустойчивости. А именно, амплитуды и фазы восприимчивости растут с частотой по законам, близким к линейным или параболическим. В результате этого роста восприимчивость к относительно высокочастотным вибрациям (например, $f = 14$ Гц) оказывается в $3 \div 4$ раза выше, чем восприимчивость к стационарным неоднородностям поверхности. Таким образом, несмотря на то, что нестационарные вихри Гёртлера в линейной задаче устойчивости нарастают медленнее, чем стационарные [1], в реальных условиях присутствие в потоке нестационарных гёртлеровских вихрей может быть значительным за счет существенно более высокой восприимчивости течения к нестационарным возмущениям поверхности.

Выводы

1. Разработан новый источник возмущений, способный моделировать контролируемые неоднородности поверхности (неровности и вибрации) в широком диапазоне параметров: частот и поперечных волновых чисел.

2. Показано, что работа источника приводит к порождению в пограничном слое контролируемых, нестационарных возмущений, которые в дальнем поле представляют собой вихри первой моды дискретного спектра задачи нестационарной гёртлеровской неустойчивости с заданными параметрами (поперечной длиной волны и частотой) и развиваются по законам линейной теории устойчивости. Найдено, что протяженность ближнего поля этого источника вниз по потоку относительно мала.

3. Благодаря применению разработанной методики впервые экспериментально получены коэффициенты восприимчивости пограничного слоя к неоднородностям поверхности при возбуждении нестационарных вихрей Гёртлера (включая случай стационарных вихрей) первой, наиболее опасной, дискретной гёртлеровской моды. Обоснована независимость этих коэффициентов от амплитуды и формы исследованных неоднородностей.

4. Обнаружено, что амплитуды коэффициентов восприимчивости при возбуждении вихрей Гёртлера значительно меньше, чем при возбуждении мод других типов гидродинамической неустойчивости (волн Толлмина–Шлихтинга и мод неустойчивости поперечного течения).

5. Найдено, что амплитуда коэффициентов восприимчивости течения возрастает с частотой и на высоких частотах может превышать восприимчивость к стационарным неоднородностям поверхности в несколько раз. Фазы коэффициентов восприимчивости слабо нарастают с частотой по закону близкому к линейному.

6. Изменение поперечного масштаба возмущений поверхности слабо влияет на восприимчивость на нулевой частоте, однако на высоких частотах эффективность возбуждения вихрей Гёртлера существенно зависит от поперечного масштаба.

7. Найдено, что частотные зависимости эффективности механизмов линейной устойчивости и восприимчивости разнонаправлены, находятся в конкуренции и могут частично компенсировать друг друга. На практике это может способствовать развитию в пограничном слое гёртлеровских вихрей широкого диапазона частот.

Полученные в работе данные могут быть использованы для оценки начальных амплитуд стационарных и нестационарных вихрей Гёртлера, возбуждаемых неоднородностями поверхности, а также для верификации линейных теорий восприимчивости и совершенствования методов предсказания положения перехода в течениях, характеризующихся неустойчивостью Гёртлера.

Список литературы

1. Boiko A.V., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Mischenko D.A. Steady and unsteady Görtler boundary-layer instability on concave wall // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2010. Vol. 29. P. 61–83.
2. Hall P. The nonlinear development of Goertler vortices in growing boundary layers // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 193. P. 243–266.
3. Luchini P, Bottaro A. Goertler vortices: a backward-in-time approach to the receptivity problem // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 363. P. 1–23.
4. Bottaro A., Luchini P. Goertler vortices: Are they amenable to local eigenvalue analysis? // Eur. J. Mech. B/Fluids. 1999. Vol. 18. P. 47–65.

5. Denier J. P., Seddougui S.O., Hall P. On the receptivity problem for Goertler vortices: vortex motions induced by wall roughness // Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 1991. Vol. 335. P. 51–85.
6. Bassom A. P., Hall P. Concerning the interaction of non-stationary crossflow vortices in a three-dimensional boundary layer // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1991. Vol. 44. P. 147–172.
7. Borodulin V.I., Kachanov Y.S., Koptsev D.B. Experimental study of resonant interactions of instability waves in self-similar boundary layer with an adverse pressure gradient: I. Tuned resonances // Journal of Turbulence. 2002. Vol. 3, No. 62. P. 1–38.
8. Crouch J.D., Kachanov Y.S., Gaponenko V.R. Swept-wing boundary-layer receptivity to surface non-uniformities // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 461. P. 93–126.
9. Kachanov Y.S. Three-dimensional receptivity of boundary layers // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2000. Vol. 19, No. 5. P. 723–744.
10. Boiko A.V., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Mischenko D.A. Investigation of weakly-nonlinear development of unsteady Görtler vortices // Thermophysics and Aeromechanics. 2010. Vol. 17, No. 4. P. 455–481.
11. Bake S., Ivanov A.V., Fernholz H.H., Neeman K., Kachanov Y.S. Receptivity of boundary layers to three-dimensional disturbance / Eur. J. Mech. B/Fluids. 2002. Vol. 21, No. 1. P. 29–48.

Статья поступила в редакцию 27 октября 2011 г.