УДК 550.832.6

МЕТОД ПОКОЭФФИЦИЕНТНОГО ОСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ГАЗА В СКВАЖИНЕ

А. И. Филиппов, О. В. Ахметова, А. А. Ковальский

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
453100 Стерлитамак, Россия
E-mails: tfmo@asspa.bashtel.ru, ahoksana@yandex.ru, aakov68@mail.ru

Задача об определении температуры ламинарного газового течения, в которой уравнение конвективной теплопроводности содержит два переменных коэффициента, сведена к неклассическим задачам для нулевого и первого коэффициентов асимптотического разложения по формальному параметру. С использованием преобразования Лапласа — Карсона получены аналитические выражения для температурного поля восходящего ламинарного газового потока в скважине с учетом зависимостей плотности и скорости от пространственных координат в нулевом и первом асимптотических приближениях. Получены выражения для температуры, асимптотически осредненной по сечению скважины, а также для распределения температуры по радиусу сечения.

Ключевые слова: течение газа, газовая скважина, температурное поле, асимптотический метод, ламинарный режим течения.

DOI: 10.15372/PMTF20180108

Введение. При решении различных геофизических задач, таких как определение возможных диапазонов температуры, при которой происходит образование газового гидрата, а также для интерпретации результатов термических измерений в стволе скважины широко используются расчеты температуры.

Оригинальный подход к выводу аналитических выражений для исследуемых температурных полей разработан В. Г. Шуховым [1] на основе формулы Ньютона для теплообмена на поверхности в предположении, что коэффициент теплообмена потока в скважине с окружающими породами не зависит от времени. В работе [2] предложен интегральный метод для учета теплообмена потока с окружающими породами, при этом тепловой поток задавался в виде свертки. Данный подход развит в работах [3–7], а построенные в [2] решения для температуры несжимаемой жидкости и газа в стволе скважины в настоящее время используются для расчета средней температуры флюида в скважине. Совершенствование ЭВМ способствовало развитию численных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих нестационарный теплообмен в скважине, в том числе сжимаемого газа [8, 9]. В свою очередь, совершенствование численных методов содействовало развитию аналитических [10] и численно-аналитических [11] методов решения задач тепло- и массообмена, поскольку аналитические решения соответствующих задач позволяют тестировать новые высокопроизводительные алгоритмы, проводить параметрический анализ температурного поля изучаемой системы и исследовать особенности процесса ее формирования [12].

При получении аналитических решений не только полагается, что профиль скорости является выровненным, но и обычно рассчитывается средняя по сечению температура. Такие модели не позволяют интерпретировать термограммы, которые можно получить только вдоль ствола скважины или по ее радиусу при изменении времени.

В работе [13] показано, что в стационарном случае учет сжимаемости газового потока с помощью зависимости плотности от вертикальной координаты $\rho(z_d) = \rho_0 Z(z_d/D)$ оказывает существенное влияние даже на нулевое приближение в асимптотическом разложении.

Учет реальной скорости даже в случае аксиальной симметрии $v = v_0 R(r_d/r_0)$ приводит к появлению дополнительного переменного коэффициента в уравнении конвективной теплопроводности, что существенно затрудняет решение задачи о температурных полях в скважине. Применение асимптотических методов при решении задач с переменными коэффициентами затруднительно, так как при осреднении уравнения возникает интеграл, содержащий в качестве множителя переменный коэффициент, что препятствует переходу к задаче для средних значений остаточного члена и усложняет процедуру поиска дополнительных нелокальных условий.

В настоящей работе показано, что трудностей можно избежать, применяя к задаче для остаточного члена процедуру асимптотического разложения. Соответствующие задачи для коэффициентов разложения остаточного члена (КРОЧ) не содержат переменных коэффициентов, что позволяет использовать интегральное осреднение при решении задач для КРОЧ. Данный подход позволяет свести задачу с переменными коэффициентами к задачам для коэффициентов асимптотического разложения (КР), не содержащим коэффициентов, зависящих от времени и пространственных координат. К таким задачам для КР применимы хорошо развитые классические методы, например метод интегральных преобразований.

1. Постановка задачи. На рис. 1 показана геометрия задачи о температурном поле газа, движущегося со скоростью $\boldsymbol{v}$ в вертикальной скважине радиусом r_0. Ось z_d цилиндри-

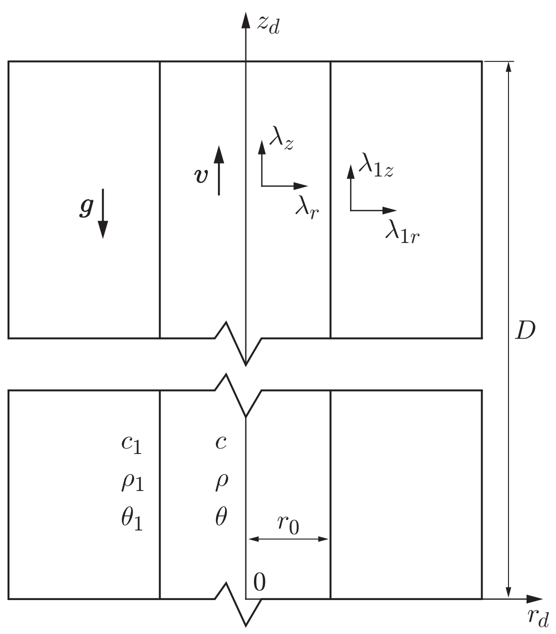

Рис. 1. Геометрия задачи

ческой системы координат направлена вертикально вверх вдоль оси скважины ($z_d = 0$ на забое). Радиальные координатные линии r_d расположены в плоскости, перпендикулярной оси трубы. На искомое решение налагается условие симметрии, заключающееся в том, что производная по радиальной координате на оси z_d в центре скважины обращается в нуль. В предположении аксиальной симметрии задача в математической постановке включает уравнение теплопроводности в окружающем трубу массиве

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \lambda_{1z} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z_d^2} + \lambda_{1r} \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d}\Big(r_d \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d}\Big), \qquad r_d > r_0, \quad \tau > 0, \quad z_d > 0 \tag{1.1}$$

и уравнение конвективной теплопроводности потока газа в скважине

$$c\rho_0 Z\Big(\frac{z_d}{D}\Big) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + c\rho_0 v_0 R\Big(\frac{r_d}{r_0}\Big) \frac{\partial \theta}{\partial z_d} = \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_d^2} + \lambda_r \frac{1}{r_d} \frac{\partial}{\partial r_d}\Big(r_d \frac{\partial \theta}{\partial r_d}\Big) + q(z_d),$$
$$r_d < r_0, \qquad \tau > 0, \qquad z_d > 0, \tag{1.2}$$

где $q(z_d)$ — функция плотности источников тепла; θ — температурное поле газа; ρ_0 — фиксированное значение плотности; λ — теплопроводность газа; c — удельная теплоемкость газа; v_0 — средняя по сечению скважины скорость газа; D — глубина скважины; $Z(z_d)$ — относительная плотность газа; τ — время; r_d, r_0 — размерная радиальная координата и внутренний радиус трубы соответственно.

На границе трубы и окружающего массива задаются условия равенства температур и тепловых потоков

$$\theta\big|_{r_d=r_0} = \theta_1\big|_{r_d=r_0}, \qquad \lambda_r \frac{\partial \theta}{\partial r_d}\Big|_{r_d=r_0} = \lambda_{1r} \frac{\partial \theta_1}{\partial r_d}\Big|_{r_d=r_0}, \tag{1.3}$$

где λ_1, θ_1 — теплопроводность и температурное поле окружающей среды соответственно; λ_r — теплопроводность газа в радиальном направлении. Начальные условия соответствуют естественной невозмущенной температуре Земли, которая увеличивается с увеличением глубины z_d по линейному закону и совпадает с температурой в удаленных от трубы точках окружающего массива:

$$\theta\big|_{\tau=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d, \qquad \theta_1\big|_{\tau=0} = \theta_{01} - \Gamma z_d, \qquad \theta_1\big|_{r_d\to\infty} = \theta_{01} - \Gamma z_d \tag{1.4}$$

(Γ — геометрический градиент). В точке $z_d = 0$ температура потока изменяется по заданному закону и зависит от времени следующим образом:

$$\theta\big|_{z_d=0} = \theta_{10}(\tau). \tag{1.5}$$

Для обеспечения единственности решения задачи необходимо добавить граничные условия по z_d, однако в пренебрежении вторыми производными по z_d после обезразмеривания они не формулируются. Заметим, что в данной задаче, в отличие от задач, рассмотренных в работах [14–16], имеется два переменных коэффициента в уравнении конвективной теплопроводности.

При введении безразмерных переменных в задаче (1.1)–(1.5) использовались соотношения

$$r = \frac{r_d}{r_0}, \quad z = \frac{z_d}{D}, \quad \mathrm{Fo} = \frac{\tau a_{1r}}{r_0^2}, \quad a_{1r} = \frac{\lambda_{1r}}{\rho_1 c_1}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{v_0 r_0}{a_{1r}}, \quad \Lambda = \frac{\lambda_{1r}}{\lambda_r}, \quad \nu = \frac{r_0}{D},$$

$$\chi = \frac{\rho_1 c_1}{\rho_0 c}, \quad T_1 = \frac{\theta_1 - \theta_{01} + \Gamma z_d}{\theta_{11}}, \quad T = \frac{\theta - \theta_{01} + \Gamma z_d}{\theta_{11}}, \quad T_0(\mathrm{Fo}) = \frac{\theta_{10}(\tau) - \theta_{01}}{\theta_{11}},$$

$$\theta_{11} = \Gamma D, \qquad Q(z) = \frac{r_0^2 q(z_d)}{a_{1r}\rho_0 c\theta_{11}},$$

где Fo, Pe — числа Фурье и Пекле; $Q(z)$ — безразмерная функция источников; T, T_0, T_1 — безразмерные температуры газа, пласта и окружающей среды соответственно; χ — отношение объемных теплоемкостей окружающей среды и газа в фиксированном сечении. При этом в уравнениях (1.1), (1.2) слагаемые, содержащие величину ν^2, опущены, поскольку квадрат величины $\nu = r_0/D \approx 10^{-4}$ представляет собой малый множитель.

С учетом сказанного выше задачу (1.1)–(1.5) запишем в безразмерном виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T_1}{\partial\,\mathrm{Fo}} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial T_1}{\partial r}\Big) = 0, \qquad r > 1, \quad \mathrm{Fo} > 0, \quad z > 0,\\
Z(z)\,\frac{\partial T}{\partial\,\mathrm{Fo}} + \nu\,\mathrm{Pe}\,R(r)\Big(\frac{\partial T}{\partial z} - 1\Big) = \frac{\chi}{\varepsilon\Lambda}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial T}{\partial r}\Big) + Q(z), \quad r < 1,\ \mathrm{Fo} > 0,\ z > 0,\\
T\Big|_{r=1} = T_1\Big|_{r=1}, \qquad \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=1} = \varepsilon\Lambda\,\frac{\partial T_1}{\partial r}\Big|_{r=1},\\
T\Big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \qquad T_1\Big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \qquad T_1\Big|_{r\to\infty} = 0, \qquad T\Big|_{z=0} = T_0(\mathrm{Fo}).
\end{gathered} \tag{1.6}$$

В задаче (1.6) путем замены Λ на $\varepsilon\Lambda$ формально введен параметр асимптотического разложения ε. Такое введение формального параметра имеет следующий физический смысл: стремление этого параметра к нулю: $\varepsilon \to 0$ соответствует увеличению радиальной компоненты теплопроводности до бесконечности: $\lambda_r \to \infty$ (случай $\varepsilon = 1$ соответствует исходной задаче). Выражения (1.6) представляют собой задачу сопряжения, содержащую краевые условия четвертого рода и линейное неоднородное дифференциальное уравнение параболического типа с переменными коэффициентами $R(r)$, $Z(z)$ и стационарным источником $Q(z)$.

2. Асимптотическое разложение задачи. Применим рассмотренную модификацию асимптотического метода при решении задачи о температурном поле ламинарного течения газа, содержащей уравнение с переменными коэффициентами.

Решение задачи (1.6) будем строить в виде асимптотических рядов по параметру ε [14–16]

$$T_1 = T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \varepsilon^2 T_1^{(2)} + \ldots, \qquad T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)} + \ldots.$$

Процедура определения коэффициентов асимптотического разложения повторяется до получения требуемого количества слагаемых, однако часто можно ограничиться нулевым и первым слагаемыми в асимптотическом разложении (КР более высоких порядков громоздки и, как правило, практически не оказывают влияния на аналитические зависимости). При этом точное решение можно представить в виде

$$T_1 = T_1^{(0)} + \varepsilon T_1^{(1)} + \Theta_1^{(1)}, \qquad T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \Theta^{(1)}.$$

Величина остаточного члена Θ позволяет оценить точность первого приближения. Для остаточного члена Θ формулируется краевая задача и находится точное или приближенное решение. Анализ поведения найденного решения для остаточного члена позволяет определить область лучшей применимости первого приближения.

3. Нулевое приближение. Покажем, что коэффициент $T^{(1)}$ можно определить таким образом, чтобы решение осредненной задачи для остаточного члена обращалось в нуль: $\langle\Theta^{(1)}\rangle = 0$ при любых значениях параметра ε.

Повторяя процедуру "расцепления" [14–16], получаем, что в нулевом приближении температура не зависит от радиальной координаты r и является функцией координаты z и времени Fo: $T^{(0)} = T^{(0)}(z, \mathrm{Fo})$.

Записывая слагаемые при ε^1, получаем "зацепленное" уравнение для определения нулевого КР температуры в трубе:

$$Z(z)\,\frac{\partial T^{(0)}}{\partial\,\mathrm{Fo}} - \frac{\chi}{\Lambda}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}\Big) + \nu\,\mathrm{Pe}\,R(r)\,\Big(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1\Big) - Q(z) = 0. \tag{3.1}$$

Используя процедуру “расцепления” [16], уравнение (3.1) запишем в виде

$$Z(z)\,\frac{\partial T^{(0)}}{\partial\,\mathrm{Fo}} + 2\nu\,\mathrm{Pe}\,R_1(1)\Big(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1\Big) = 2\chi\,\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=1} + Q(z), \quad r < 1,\ \mathrm{Fo} > 0,\ z > 0. \tag{3.2}$$

Окончательно математическая постановка задачи в нулевом приближении включает “расцепленное” выражение (3.2), уравнение для окружающей скважину среды

$$\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial\,\mathrm{Fo}} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial T_1^{(0)}}{\partial r}\Big) = 0, \qquad r > 1, \quad \mathrm{Fo} > 0, \quad z > 0, \tag{3.3}$$

а также начальные и граничные условия

$$T^{(0)}\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \qquad T_1^{(0)}\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0; \tag{3.4}$$

$$T^{(0)} = T_1^{(0)}\big|_{r=1}, \qquad T^{(0)}\big|_{r\to\infty} = 0, \qquad T^{(0)}\big|_{z=0} = T_0(\mathrm{Fo}). \tag{3.5}$$

Используя преобразование Лапласа — Карсона $T_j^{\text{и}} = p\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-p\,\mathrm{Fo}}\,T_j(\mathrm{Fo})\,d\,\mathrm{Fo}$, задачу (3.2)–(3.5) запишем в пространстве изображений

$$pT_1^{(0)\,\text{и}} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial T_1^{(0)\,\text{и}}}{\partial r}\Big) = 0, \qquad r > 1, \quad z > 0; \tag{3.6}$$

$$Z(z)pT^{(0)\,\text{и}} + 2\nu\,\mathrm{Pe}\ R_1(1)\Big(\frac{\partial T^{(0)\,\text{и}}}{\partial z} - 1\Big) = 2\chi\,\frac{\partial T_1^{(0)\,\text{и}}}{\partial r}\Big|_{r=1} + Q(z), \quad r < 1,\ z > 0; \tag{3.7}$$

$$T^{(0)\,\text{и}} = T_1^{(0)\,\text{и}}\big|_{r=1}, \quad T_1^{(0)\,\text{и}}\big|_{r\to\infty} = 0, \quad T^{(0)\,\text{и}}\big|_{z=0} = T_0^{\text{и}}(p). \tag{3.8}$$

Решение уравнения (3.6) с учетом условий (3.8) представим с помощью функции Макдональда нулевого порядка мнимого аргумента

$$T_1^{(0)\,\text{и}} = \frac{K_0(r\sqrt{p}\,)}{K_0(\sqrt{p}\,)}\,T^{(0)\,\text{и}}, \qquad r > 1. \tag{3.9}$$

Тогда производную для окружающего массива $r > 1$ и ее след на границе с учетом свойства дифференцирования $K_0'(x) = -xK_1(x)$ можно представить в виде

$$\frac{\partial T_1^{(0)\,\text{и}}}{\partial r} = -\sqrt{p}\,\frac{K_1(r\sqrt{p}\,)}{K_0(\sqrt{p}\,)}\,T^{(0)\,\text{и}}, \qquad \frac{\partial T_1^{(0)\,\text{и}}}{\partial r}\Big|_{r=1} = -\sqrt{p}\,kT^{(0)\,\text{и}}, \tag{3.10}$$

где $k = k(p) = K_1(\sqrt{p}\,)/K_0(\sqrt{p}\,)$ — отношение функций Макдональда первого и нулевого порядков. С учетом (3.10) уравнение (3.7) для определения $T^{(0)\,\text{и}}$ запишем в виде

$$(pZ(z) + 2\chi k\sqrt{p}\,)T^{(0)\,\text{и}} + 2\nu\,\mathrm{Pe}\,R_1(1)\Big(\frac{\partial T^{(0)\,\text{и}}}{\partial z} - 1\Big) = Q(z), \quad r < 1,\ z > 0. \tag{3.11}$$

Решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка (3.11) находится стандартным способом и с учетом условия (3.8) записывается в виде

$$T^{(0)\,\text{и}} = \int\limits_0^z F(\xi)\exp\Big(-\int\limits_\xi^z \alpha(\xi')\,d\xi'\Big)\,d\xi + T_0(p)\exp\Big(-\int\limits_0^z \alpha(\xi)\,d\xi\Big), \quad r < 1,\ z > 0, \tag{3.12}$$

где

$$\alpha(z) = \frac{pZ(z) + 2\chi k\sqrt{p}}{2\nu\,\mathrm{Pe}\,R_1(1)}, \qquad F(z) = \frac{Q(z)}{2\nu\,\mathrm{Pe}\,R_1(1)} + 1.$$

Подставляя (3.12) в (3.9), получаем решение для внешней области

$$T_1^{(0)\,\text{и}} = \frac{K_0(r\sqrt{p}\,)}{K_0(\sqrt{p}\,)} \Big[\int\limits_0^z F(\xi) \exp\Big(-\int\limits_\xi^z \alpha(\xi')\,d\xi' \Big)\,d\xi + T_0(p) \exp\Big(-\int\limits_0^z \alpha(\xi)\,d\xi \Big) \Big],$$
$$r > 1, \qquad z > 0. \tag{3.13}$$

В предположении малости времен [14, 16] в пространстве оригиналов выражение (3.12) принимает вид

$$T^{(0)} = \int\limits_0^z F(\xi) \operatorname{erfc} \frac{\chi(z-\xi)}{\Big[2\nu \operatorname{Pe} R_1(1)\Big(2\nu \operatorname{Pe} R_1(1)\operatorname{Fo} - \int\limits_\xi^z Z(\xi')\,d\xi'\Big)\Big]^{1/2}} \times$$
$$\times \Phi\Big(\operatorname{Fo} - \int\limits_\xi^z \frac{Z(\xi')}{2\nu \operatorname{Pe} R_1(1)}\,d\xi'\Big) +$$
$$+ T_0 \operatorname{erfc} \frac{\chi z}{\Big[2\nu \operatorname{Pe} R_1(1)\Big(2\nu \operatorname{Pe} R_1(1)\operatorname{Fo} - \int\limits_0^z Z(\xi')\,d\xi'\Big)\Big]^{1/2}}\, \Phi\Big(\operatorname{Fo} - \int\limits_0^z \frac{Z(\xi')}{2\nu \operatorname{Pe} R_1(1)}\,d\xi'\Big),$$
$$r < 1, \qquad z > 0.$$

Выражения (3.12), (3.13) не содержат информации о зависимости скорости от радиальной координаты и совпадают с решениями задачи о температурном поле течения газа в случае выровненного профиля скорости [13].

4. Постановка задачи для определения первого коэффициента разложения. Для определения вклада, вносимого режимом течения, получим выражение для первого коэффициента разложения.

"Зацепленное" уравнение для первого КР представим в виде

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r}\Big) = \frac{\Lambda Z(z)}{\chi}\,\frac{\partial T^{(1)}}{\partial \operatorname{Fo}} + \frac{\Lambda \nu \operatorname{Pe}}{\chi}\,R(r)\,\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}. \tag{4.1}$$

Для "расцепления" (4.1) запишем зависимость $T^{(1)}$ от радиальной координаты, следующую из (3.1):

$$T^{(1)} = \frac{r^2}{4}\,A(z,\operatorname{Fo}) + R_2(r)B(z,\operatorname{Fo}) + D(z,\operatorname{Fo}),$$

где

$$A(z,\operatorname{Fo}) = \frac{\Lambda}{\chi}\,\Big(Z(z)\,\frac{\partial T^{(0)}}{\partial \operatorname{Fo}} - Q(z)\Big), \qquad B(z,\operatorname{Fo}) = \frac{\nu \operatorname{Pe} \Lambda}{\chi}\Big(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z} - 1\Big),$$

$D(z,\operatorname{Fo})$ — вспомогательные функции, подлежащие определению; $R_2(r) = \int\limits_0^r R_1(r')\,\dfrac{dr'}{r'}$ —

моментная функция переменного коэффициента. “Расцепленное” уравнение для первого КР имеет вид

$$Z(z)\,\frac{\partial D}{\partial\,\mathrm{Fo}}+2\nu\,\mathrm{Pe}\,R_1(1)\,\frac{\partial D}{\partial z}-2\chi\,\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=1}=$$
$$=-\frac{\Lambda}{\chi}\Big[\frac{Z^2(z)}{8}\,\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial\,\mathrm{Fo}^2}+\Big(R_3(1)\,\frac{2Z(z)\nu\,\mathrm{Pe}}{\chi}+2R_5(1)(\nu\,\mathrm{Pe})^2\Big)\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial\,\mathrm{Fo}\,\partial z}+$$
$$+\frac{\nu\,\mathrm{Pe}\,R_4(1)}{2}\,\frac{\partial^2 Z(z)T^{(0)}}{\partial\,\mathrm{Fo}\,\partial z}-\frac{\nu\,\mathrm{Pe}\,R_4(1)}{2}\,\frac{\partial Q(z)}{\partial z}\Big]=G(z,\mathrm{Fo}). \qquad (4.2)$$

Математическая постановка задачи для первого КР содержит также уравнение для окружающих скважину пород

$$\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial\,\mathrm{Fo}}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial r}\Big)=0, \qquad r>1, \quad \mathrm{Fo}>0, \quad z>0 \qquad (4.3)$$

и условия

$$T^{(1)}\big|_{r=1}=T_1^{(1)}\big|_{r=1}, \qquad T_1^{(1)}\big|_{\mathrm{Fo}=0}=0, \qquad T^{(1)}\big|_{r\to\infty}=0. \qquad (4.4)$$

При использовании асимптотических методов условия $T^{(1)}\big|_{\mathrm{Fo}=0}=0$ и $T^{(1)}\big|_{z=0}=0$ необходимо заменить среднеинтегральными. Для нахождения нелокальных среднеинтегральных условий рассмотрим задачу для остаточного члена.

В [14–16] нелокальные среднеинтегральные условия находились путем интегрального осреднения задачи для остаточного члена. Применить данный метод к рассматриваемой задаче затруднительно вследствие наличия переменного коэффициента $R(r)$ [16].

5. Задача для остаточного члена. Рассмотрим новый подход, требующий выполнения условия равенства нулю асимптотически осредненных значений первого КРОЧ по параметру ε.

Задача для остаточного члена формулируется путем подстановки асимптотических формул $T_1=T_1^{(0)}+\varepsilon T_1^{(1)}+\Theta_1$, $T=T^{(0)}+\varepsilon T^{(1)}+\Theta$ в исходную параметризованную задачу и после несложных преобразований принимает вид

$$\frac{\partial\Theta_1}{\partial\,\mathrm{Fo}}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\Theta_1}{\partial r}\Big)=0,$$
$$Z(z)\,\frac{\partial\,(\varepsilon T^{(1)}+\Theta)}{\partial\,\mathrm{Fo}}+\nu\,\mathrm{Pe}\,R(r)\,\frac{\partial(\varepsilon T^{(1)}+\Theta)}{\partial z}-\frac{\chi}{\varepsilon\Lambda}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\Theta}{\partial r}\Big)=0,$$
$$\Theta\big|_{r=1}=\Theta_1\big|_{r=1}, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial r}\Big|_{r=1}=\varepsilon\Lambda\,\frac{\partial\,(\varepsilon T_1^{(1)}+\Theta_1)}{\partial r}\Big|_{r=1}, \qquad (5.1)$$
$$(\varepsilon T^{(1)}+\Theta)\big|_{\mathrm{Fo}=0}=0, \quad \Theta_1\big|_{\mathrm{Fo}=0}=0, \quad \Theta_1\big|_{r\to\infty}=0, \quad (\varepsilon T^{(1)}+\Theta)\big|_{z=0}=0.$$

Для формулировки дополнительных условий представим остаточный член также в виде асимптотических рядов

$$\Theta_1=\Theta_1^{(0)}+\varepsilon\Theta_1^{(1)}+\varepsilon^2\Theta_1^{(2)}+\ldots, \qquad \Theta=\Theta^{(0)}+\varepsilon\Theta^{(1)}+\varepsilon^2\Theta^{(2)}+\ldots. \qquad (5.2)$$

Подставляя (5.2) в (5.1), получаем задачу для остаточного члена, разбитую по степеням ε:

$$\frac{\partial\Theta_1^{(0)}}{\partial\,\mathrm{Fo}}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\Theta_1^{(0)}}{\partial r}\Big)+\varepsilon\Big[\frac{\partial\Theta_1^{(1)}}{\partial\,\mathrm{Fo}}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\Theta_1^{(1)}}{\partial r}\Big)\Big]+\ldots=0; \qquad (5.3)$$

$$\varepsilon^0\Big[-\frac{\chi}{\Lambda}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\Theta^{(0)}}{\partial r}\Big)\Big]+\varepsilon^1\Big[Z(z)\,\frac{\partial\Theta^{(0)}}{\partial\,\mathrm{Fo}}-\frac{\chi}{\Lambda}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial r}\Big)+\nu\,\mathrm{Pe}\,R(r)\,\frac{\partial\Theta^{(0)}}{\partial z}-Q(z)\Big]+$$
$$+\varepsilon^2\Big(Z(z)\,\frac{\partial\,(\Theta^{(1)}+T^{(1)})}{\partial\,\mathrm{Fo}}-\frac{\chi}{\Lambda}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial T^{(2)}}{\partial r}\Big)+$$
$$+\nu\,\mathrm{Pe}\,R(r)\,\frac{\partial\,(\Theta^{(1)}+T^{(1)})}{\partial z}\Big)+\ldots=0; \qquad (5.4)$$

$$\Theta^{(0)}\big|_{r=1}-\Theta_1^{(0)}\big|_{r=1}+\varepsilon\big(\Theta^{(1)}\big|_{r=1}-\Theta_1^{(1)}\big|_{r=1}\big)+\ldots=0,$$
$$\frac{\partial\Theta^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=1}+\varepsilon\Big(\frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=1}-\Lambda\,\frac{\partial\Theta_1^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=1}\Big)+\varepsilon^2\Big(\frac{\partial\Theta^{(2)}}{\partial r}\Big|_{r=1}-\Lambda\,\frac{\partial\,(\Theta_1^{(1)}+T_1^{(1)})}{\partial r}\Big|_{r=1}\Big)+\ldots=0; \qquad (5.5)$$

$$\Theta^{(0)}\big|_{\mathrm{Fo}=0}+\varepsilon(\Theta^{(1)}+T^{(1)})\big|_{\mathrm{Fo}=0}+\ldots=0, \qquad \Theta_1^{(0)}\big|_{\mathrm{Fo}=0}+\varepsilon\Theta_1^{(1)}\big|_{\mathrm{Fo}=0}+\ldots=0; \qquad (5.6)$$

$$\Theta_1^{(0)}\big|_{r\to\infty}+\varepsilon\Theta_1^{(1)}\big|_{r\to\infty}+\ldots=0, \qquad \Theta^{(0)}\big|_{z=0}+\varepsilon(\Theta^{(1)}+T^{(1)})\big|_{z=0}+\ldots=0. \qquad (5.7)$$

Как и в случае равенства коэффициента нулю, интегрируя следующее из (5.4) при $\varepsilon=0$ уравнение $\dfrac{\chi}{\varepsilon\Lambda}\,\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\dfrac{\partial\Theta^{(0)}}{\partial r}\Big)=0$, с учетом (5.7) получаем, что нулевой коэффициент не зависит от радиальной координаты: $\Theta^{(0)}=\Theta^{(0)}(z,\mathrm{Fo})$. “Расцепление” уравнения

$$\frac{\chi}{\Lambda}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial r}\Big)=Z(z)\,\frac{\partial\Theta^{(0)}}{\partial\,\mathrm{Fo}}+\nu\,\mathrm{Pe}\,R(r)\,\frac{\partial\Theta^{(0)}}{\partial z} \qquad (5.8)$$

осуществлено аналогично “расцеплению” уравнения для нулевого приближения для температуры [6–8]. Задача для нулевого КРОЧ имеет вид

$$\frac{\partial\Theta_1^{(0)}}{\partial\,\mathrm{Fo}}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\Theta_1^{(0)}}{\partial r}\Big)=0, \qquad \frac{\partial\Theta^{(0)}}{\partial\,\mathrm{Fo}}+\frac{2\nu\,\mathrm{Pe}\,R_1(1)}{Z(z)}\,\frac{\partial\Theta^{(0)}}{\partial z}=\frac{\chi}{Z(z)}\,\frac{\partial\Theta_1^{(0)}}{\partial r}\Big|_{r=1},$$
$$\Theta^{(0)}\big|_{r=1}=\Theta_1^{(0)}\big|_{r=1}, \quad \Theta^{(0)}\big|_{\mathrm{Fo}=0}=0, \quad \Theta_1^{(0)}\big|_{\mathrm{Fo}=0}=0, \quad \Theta_1^{(0)}\big|_{r\to\infty}=0, \quad \Theta^{(0)}\big|_{z=0}=0. \qquad (5.9)$$

Нетрудно показать, что задача (5.9) имеет тривиальное решение $\Theta^{(0)}=\Theta_1^{(0)}=0$. Отсюда согласно (5.8) следует, что первый КРОЧ также не зависит от радиальной координаты: $\Theta^{(1)}=\Theta^{(1)}(z,\mathrm{Fo})$.

Из (5.3)–(5.7) получаем задачу для первого КРОЧ в “расцепленном” виде

$$\frac{\partial\Theta_1^{(1)}}{\partial\,\mathrm{Fo}}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\Theta_1^{(1)}}{\partial r}\Big)=0, \qquad Z(z)\,\frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial\,\mathrm{Fo}}+2\nu\,\mathrm{Pe}\,R_1(1)\,\frac{\partial\Theta^{(1)}}{\partial z}=2\chi\,\frac{\partial\Theta_1^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=1},$$
$$\Theta^{(1)}\big|_{r=1}=\Theta_1^{(1)}\big|_{r=1}, \qquad \Theta_1^{(1)}\big|_{\mathrm{Fo}=0}=0, \qquad \Theta_1^{(1)}\big|_{r\to\infty}=0,$$
$$(T^{(1)}+\Theta^{(1)})\big|_{\mathrm{Fo}=0}=0, \qquad (T^{(1)}+\Theta^{(1)})\big|_{z=0}=0.$$

Нелокальные среднеинтегральные условия находим из требования существования тривиального решения интегрально осредненной с использованием соотношения $\langle\Theta^{(1)}\rangle = 2\int\limits_0^1 \Theta^{(1)} r\,dr$ задачи для $\Theta^{(1)}$:

$$\frac{\partial\Theta_1^{(1)}}{\partial\,\mathrm{Fo}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\Theta_1^{(1)}}{\partial r}\Big) = 0, \qquad \frac{\partial\langle\Theta^{(1)}\rangle}{\partial\,\mathrm{Fo}} + \frac{2\nu\,\mathrm{Pe}\,R_1(1)}{Z(z)}\,\frac{\partial\langle\Theta^{(1)}\rangle}{\partial z} = \frac{2\chi}{Z(z)}\,\frac{\partial\Theta_1^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=1},$$

$$\langle\Theta^{(1)}\rangle\big|_{r=1} = \Theta_1^{(1)}\big|_{r=1}, \qquad \Theta_1^{(1)}\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \qquad \Theta_1^{(1)}\big|_{r\to\infty} = 0,$$

$$\langle\Theta^{(1)}\rangle\big|_{\mathrm{Fo}=0} = -\langle T^{(1)}\rangle\big|_{\mathrm{Fo}=0}, \qquad \langle\Theta^{(1)}\rangle\big|_{z=0} = -\langle T^{(1)}\rangle\big|_{z=0}.$$

Тривиальное решение задачи для первого КРОЧ возможно в случае равенства нулю правых частей начального и граничного при $z = 0$ условий для $\langle\Theta^{(1)}\rangle$. Таким образом, условия

$$\langle T^{(1)}\rangle\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0, \qquad \langle T^{(1)}\rangle\big|_{z=0} = 0 \tag{5.10}$$

можно использовать при решении задачи для первого КР искомого решения $T^{(1)}$.

6. Решение задачи для первого асимптотического коэффициента. В соответствии с изложенным выше в окончательном виде математическая постановка задачи для первого КР помимо (4.2)–(4.4) включает нелокальные среднеинтегральные условия (5.10). В пространстве изображений Лапласа — Карсона задача имеет вид

$$pT_1^{(1)\,\text{и}} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial T_1^{(1)\,\text{и}}}{\partial r}\Big) = 0; \tag{6.1}$$

$$Zp[D^{\text{и}}(z,p) - D(z,\mathrm{Fo}=0)] + 2\nu\,\mathrm{Pe}\,R_1(1)\,\frac{\partial D^{\text{и}}}{\partial z} + 2\chi\,\frac{\partial T_1^{(1)\,\text{и}}}{\partial r}\Big|_{r=1} = G^{\text{и}}(z,p); \tag{6.2}$$

$$T^{(1)\,\text{и}}\big|_{r=1} = T_1^{(1)\,\text{и}}\big|_{r=1}; \tag{6.3}$$

$$\langle T^{(1)\,\text{и}}\rangle\big|_{z=0} = 0,$$

или

$$D^{\text{и}}(0,p) = \frac{\Lambda Q(0)}{\chi}\Big(\frac{1}{8} - \frac{R_3(1)}{R_1(1)}\Big) - \frac{\Lambda T_0(p)}{\chi}\Big(\frac{pZ(0)}{8} + 2R_3(1)\nu\,\mathrm{Pe}\,\alpha(0,p)\Big); \tag{6.4}$$

$$\langle T^{(1)\,\text{и}}\rangle\big|_{p\to\infty} = 0, \tag{6.5}$$

или

$$D^{\text{и}}(z,p\to\infty) = D(z,\mathrm{Fo}=0) = -\frac{\Lambda}{\chi}\Big[\varphi(z) + Q(z)\Big(\frac{R_3(1)}{R_1(1)} - \frac{1}{8}\Big)\Big];$$

$$T^{(1)\,\text{и}} = \frac{\Lambda r^2}{4\chi}\,(Z(z)pT^{(0)\,\text{и}} - Q(z)) + R_2(r)\,\frac{\nu\,\mathrm{Pe}\,\Lambda}{\chi}\Big(\frac{\partial T^{(0)\,\text{и}}}{\partial z} - 1\Big) + D^{\text{и}}(z,p), \tag{6.6}$$

где

$$\varphi(z) = \lim_{p\to\infty}\Big[\Big(\frac{Z(z)p}{8} + 2\nu\,\mathrm{Pe}\,R_3(1)\alpha(z,p)\Big)T^{(0)\,\text{и}}\Big].$$

Решения задачи (6.1)–(6.6) имеют вид

$$T^{(1)\,\text{и}} = \frac{\Lambda r^2 Z(z)}{4\chi}\, pT^{(0)\,\text{и}} + R_2(r)\,\frac{\nu\,\mathrm{Pe}\,\Lambda}{\chi}\Big(\frac{\partial T^{(0)\,\text{и}}}{\partial z} - 1\Big) - \frac{\Lambda r^2}{4\chi}\,Q(z) +$$
$$+ \int\limits_0^z F_1^{\text{и}}(\xi,p)\exp\Big(-\int\limits_\xi^z \alpha(\xi',p)\,d\xi'\Big)d\xi + D^{\,\text{и}}(0,p)\exp\Big(-\int\limits_0^z \alpha(\xi)\,d\xi\Big), \qquad r<1,$$
$$T_1^{(1)\,\text{и}} = \frac{K_0(r\sqrt{p}\,)}{K_0(\sqrt{p}\,)}\Big[\frac{\Lambda r^2 Z(z)}{4\chi}\, pT^{(0)\,\text{и}} + R_2(1)\,\frac{\nu\,\mathrm{Pe}\,\Lambda}{\chi}\Big(\frac{\partial T^{(0)\,\text{и}}}{\partial z} - 1\Big) - \frac{\Lambda r^2}{4\chi}\,Q(z) + \qquad (6.7)$$
$$+ \int\limits_0^z F_1^{\text{и}}(\xi,p)\exp\Big(-\int\limits_\xi^z \alpha(\xi',p)\,d\xi'\Big)\,d\xi + D^{\,\text{и}}(0,p)\exp\Big(-\int\limits_0^z \alpha(\xi)\,d\xi\Big)\Big], \qquad r>1,$$

где

$$F_1^{\text{и}}(z,p) = G_1^{\text{и}}(z,p) + ZpD(z,\mathrm{Fo}=0) = (Zp + 2\chi\sqrt{p}\,k)D^{\,\text{и}}(z,p) + 2\nu\,\mathrm{Pe}\,R_1(1)\,\frac{\partial D^{\,\text{и}}}{\partial z} =$$
$$= \Big[G^{\,\text{и}}(z,p) - 2\chi\sqrt{p}\,k\Big(\frac{\Lambda}{4\chi}\,(Z(z)pT^{(0)\,\text{и}} - Q(z))\Big) + R_2(1)\,\frac{\nu\,\mathrm{Pe}\,\Lambda}{\chi}\Big(\frac{\partial T^{(0)\,\text{и}}}{\partial z} - 1\Big)\Big].$$

Таким образом, выражения (3.12), (6.7) являются решением поставленной задачи о температурном поле ламинарного течения газа в скважине в нулевом и первом приближениях. Построенные на их основе расчетные формулы и анализ результатов расчетов обсуждаются в следующем разделе.

7. Анализ результатов расчетов. На рис. 2–4 приведены пространственно-временные зависимости температуры в газовой скважине, рассчитанные по полученным формулам при наличии только естественных источников тепла.

На рис. 2 представлены безразмерные зависимости температуры метана в нулевом приближении от вертикальной координаты при различных значениях времени. Полученные зависимости позволяют определить основные особенности формирования квазистационарного температурного поля в скважине. Начальные изменения температуры обусловлены сдвигом столба газа в скважине, поэтому на кривых *1, 2* (см. рис. 2) имеется точка перехода к значениям глубины, при которых температура не зависит от вертикальной координаты. В размерных переменных это соответствует сдвигу геотермического распределения вместе со столбом газа в скважине. С увеличением времени указанный фронт перехода “размывается” и на кривых *3, 4* (см. рис. 2) определить его положение затруднительно. Кривые *5, 6* соответствуют квазистационарному тепловому полю, которое достигается при $0 < z < 0{,}4$ за время $\mathrm{Fo} = 0{,}2$.

На рис. 3 приведены безразмерные зависимости температуры метана в нулевом приближении от времени при различных значениях глубины скважины.

На рис. 4 представлены нормированные зависимости температуры от радиуса скважины для ламинарного и выровненного профилей скорости ($\tilde T$ — разность температур на стенке скважины и в любой точке внутри скважины). Видно, что вклад ламинарного течения больше вклада течения с выровненным профилем скорости приблизительно на 50 %. Это означает, что учет режима течения имеет большое значение для интерпретации термограмм, особенно если измерения температуры осуществляются в центре ствола скважины.

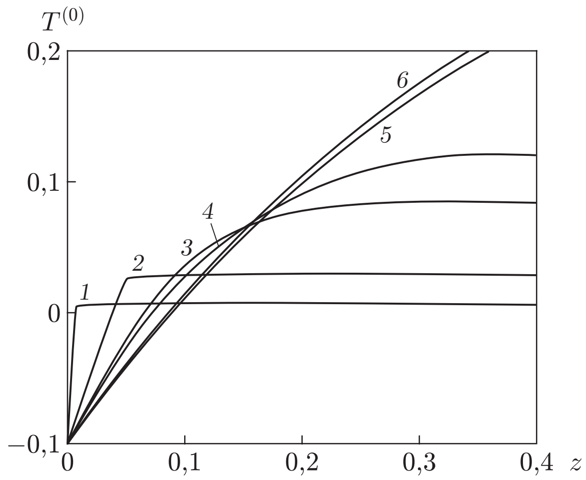

Рис. 2. Зависимость температуры в нулевом приближении от вертикальной координаты при $\mathrm{Pe}\,\nu = 3{,}66$ и различных значениях безразмерного времени:
1 — $\mathrm{Fo} = 0{,}001$, *2* — $\mathrm{Fo} = 0{,}01$, *3* — $\mathrm{Fo} = 0{,}05$, *4* — $\mathrm{Fo} = 0{,}10$, *5* — $\mathrm{Fo} = 0{,}50$, *6* — $\mathrm{Fo} = 0{,}70$

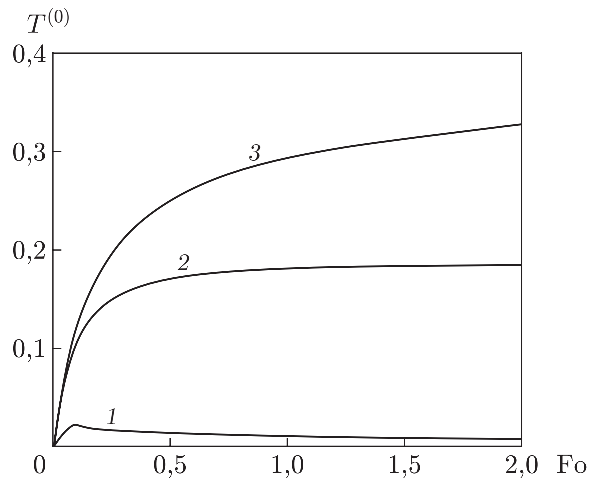

Рис. 3

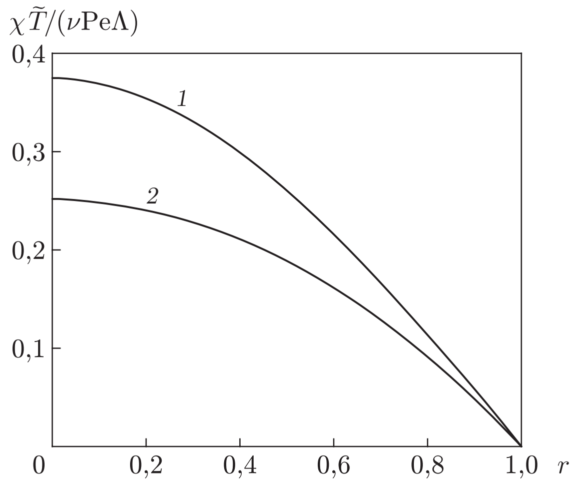

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость температуры в нулевом приближении от времени при $\mathrm{Pe}\,\nu = 3{,}66$ и различных значениях глубины скважины:
1 — $z = 0{,}1$, *2* — $z = 0{,}3$, *3* — $z = 0{,}5$

Рис. 4. Зависимость температуры от радиуса скважины для ламинарного (*1*) и выровненного (*2*) профилей скорости

Итак, предложенный метод позволяет построить новые расчетные формулы для определения температуры ламинарного течения газа, асимптотически осредненной по сечению скважины, а также для ее радиального профиля. Показано, что асимптотически осредненные по сечению скважины значения температуры не зависят от радиальных распределений скорости, т. е. формулы для ламинарного и выровненного профилей скорости совпадают даже с учетом зависимости плотности от глубины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шухов В. Г.** Избранные труды. Т. 3. Нефтепереработка. Теплотехника. М.: АН СССР, 1982.
2. **Чекалюк Э. Б.** Термодинамика нефтяного пласта. М.: Недра, 1965.
3. **Проселков Ю. М.** Теплопередача в скважинах. М.: Недра, 1975.
4. **Пудовкин М. А.** Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении / М. А. Пудовкин, И. К. Волков. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978.
5. **Пудовкин М. А.** Температурные процессы в действующих скважинах / М. А. Пудовкин, А. Н. Саламатин, В. А. Чугунов. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977.
6. **Рубинштейн Л. И.** Температурные поля в нефтяных пластах. М.: Недра, 1971.
7. **Куштанова Г. Г.** Закономерности формирования термограмм продуктивной толщи // Георесурсы. 2007. № 3. С. 47–48.
8. **Ильясов А. М., Шарафутдинов Р. Ф., Урманчеев С. Ф., Валиуллин Р. А.** Численное моделирование дисперсных течений в нефтедобывающей скважине // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2008. № 1. С. 24–28.
9. **Бондарев Э. А., Рожин И. И., Аргунова К. К.** Температурное поле многолетнемерзлых горных пород вокруг скважин при планируемой добыче нефти // Наука и образование. 2011. № 1. С. 22–26.
10. **Купцов С. М.** Температурное поле эксплуатационной скважины // Тр. Рос. гос. ун-та нефти и газа им. И. М. Губкина. 2009. № 4. С. 62–68.
11. **Ентов В. М., Чехонин Е. М.** Поле давления вокруг скважины в слоисто-неоднородном пласте // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 1. С. 83–90.
12. **Власов П. А., Волков И. К.** Квазистационарное температурное поле двухслойного полупространства с подвижной границей // Наука и образование. 2015. № 5. С. 126–136.
13. **Филиппов А. И., Ахметова О. В., Крупинов А. Г.** Дозвуковое течение реального сжимаемого газа в вертикальной трубе // Изв. вузов. Физика. 2011. Т. 54, № 12. С. 112–115.
14. **Филиппов А. И., Ахметова О. В., Зеленова М. А., Крупинов А. Г.** Исследование температурных полей потока газа в скважине // Инж.-физ. журн. 2011. Т. 85, № 5. С. 1052–1064.
15. **Филиппов А. И., Михайлов П. Н., Ахметова О. В., Горюнова М. А.** Анализ температурного поля цилиндрического потока на основе "в среднем точного" решения // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 3. С. 84–93.
16. **Филиппов А. И., Ахметова О. В., Зеленова М. А., Родионов А. С.** Задача термокаротажа с заданным радиальным профилем скорости нефтяного потока в стволе скважины // Инж.-физ. журн. 2013. Т. 86, № 1. С. 172–190.

Поступила в редакцию 5/IX 2016 г.,
в окончательном варианте — 9/I 2017 г.