ПМТФ, № 2, 1975

УДК 539.374.539.374.1

ОДИН КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

А. Ф. Ревуженко

(*Новосибирск*)

Построен класс точных решений уравнений идеальной пластичности в случае плоской деформации. Полученные решения описывают пластическое состояние различных клиньев, полуплоскостей с вырезом и в виде воронок от взрыва, пластическое состояние областей в виде рожка и т. д. Многие построенные решения имеют естественные границы — огибающие линий скольжения. Уравнения границ, линий скольжения, а также формулы для вычисления напряжений выписаны в явном виде.

1. Рассмотрим плоскую деформацию идеально пластической среды. Пусть (x_1, x_2) — декартовы координаты на плоскости Ox_1x_2; (λ_1, λ_2) — характеристические координаты; σ — первый инвариант тензора напряжений; φ — угол наклона наибольшего главного напряжения к оси Ox_1; k — постоянная материала. В принятых обозначениях уравнения предельного равновесия среды имеют вид [1]:

$$\frac{1}{2k}\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}=0;\quad \frac{1}{2k}\frac{\partial\sigma}{\partial\lambda_2}+\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}=0;$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial\lambda_1}=\operatorname{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1};\quad \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_2}=\operatorname{tg}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_2}. \tag{1.1}$$

Введем в плоскости Ox_1x_2 полярные координаты (r, θ) и новую неизвестную функцию δ — угол между координатными линиями $\theta=\mathrm{const}$; $\lambda_2=\mathrm{const}$. Из уравнений (1.1) и определения δ следует, что

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\lambda_1}=\operatorname{ctg}\delta\frac{\partial\theta}{\partial\lambda_1};\quad \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\lambda_2}=-\operatorname{tg}\delta\frac{\partial\theta}{\partial\lambda_2};$$
$$\varphi=\Phi_1(\lambda_1)-\Phi_2(\lambda_2),\quad \theta=\varphi-\delta-\frac{\pi}{4}=$$
$$=\Phi_1(\lambda_1)-\Phi_2(\lambda_2)-\delta-\frac{\pi}{4}, \tag{1.2}$$

где $\Phi_1(\lambda_1)$, $\Phi_2(\lambda_2)$ — произвольные функции. Исключая из системы (1.2) r и θ, можно получить одно уравнение относительно δ

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}\ln|\operatorname{tg}\delta|+\Phi_2'(\lambda_2)\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\operatorname{tg}\delta-\Phi_1'(\lambda_1)\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\operatorname{ctg}\delta=0.$$

Будем искать решение последнего уравнения в классе функций $\operatorname{tg}\delta=\xi_1(\lambda_1)/\xi_2(\lambda_2)$. Если $c_1\Phi_1+c_2\geqslant 0$; $c_1\Phi_2+c_3\geqslant 0$, где c_1, c_2, c_3 — постоянные, то в рассматриваемом классе решение имеет вид

$$\delta=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{c_1\Phi_1+c_2}{c_1\Phi_2+c_3}}. \tag{1.3}$$

При $c_1=0$ линиями скольжения λ_1, λ_2 являются либо два семейства логарифмических спиралей, либо два семейства координатных линий $r=\mathrm{const}$; $\theta=\mathrm{const}$. Этот вариант рассмотрен в [1]. При $c_1\neq 0$ можно без ограничения общности положить $c_1=1$; $c_2=c_3=0$; $\Phi_1(\lambda_1)=\lambda_1^2=\mu_1$; $\Phi_2(\lambda_2)=\lambda_2^2=\mu_2$, где $\mu_1,\mu_2\geqslant 0$. После подстановки (1.3) в (1.2) и (1.1) уравнения (1.1) легко интегрируются:

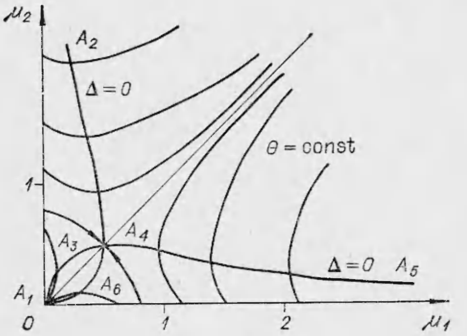
$$
(1.4)\qquad \begin{aligned}
&\frac{\sigma}{2k}=\rho^2+\sigma^0;\quad \varphi=\rho^2\cos 2\nu+\frac{\pi}{2}+\varphi^0;\\
&r=\frac{2r^0}{\rho\sin 2\nu}e^{+\rho^2\sin 2\nu};\quad \theta=\rho^2\cos 2\nu\mp\left(\frac{\pi}{2}-\nu\right)+\frac{\pi}{4}+\varphi^0;\\
&\delta=\pm\left(\frac{\pi}{2}-\nu\right),
\end{aligned}
$$

где $(\rho,\ \nu)$ — полярные координаты в плоскости параметров $(\mu_1,\ \mu_2)$; r^0, φ^0 — постоянные, отражающие произвольность выбора масштаба длин и начала отсчета угла θ; σ^0 — аддитивное постоянное давление. В дальнейшем будем полагать $r^0=1$; $\varphi^0=0$; $\sigma^0=0$.

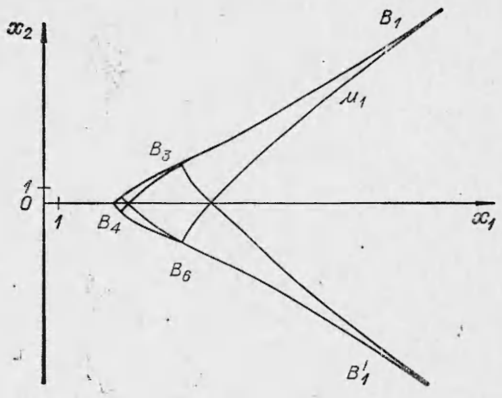
Решение (1.4) удобно исследовать в плоскости параметров $(\mu_1,\ \mu_2)$: координатные линии μ_1, μ_2 в этой плоскости являются линиями скольжения на физической плоскости Ox_1x_2, угол наклона радиуса $\nu=\mathrm{const}$ к оси μ_2 равен углу пересечения линии скольжения μ_1 на физической плоскости с радиусом $\theta=\mathrm{const}$ и, наконец, квадрат радиуса ρ на плоскости $(\mu_1,\ \mu_2)$ равен безразмерному сжатию $\frac{\sigma}{2k}$ в соответствующих точках физической плоскости.

2. Пусть в (1.4) приняты верхние знаки. На однолистной плоскости Ox_1x_2 решение (1.4) может существовать только до линии ветвления $\Delta=\partial\ (r,\ \theta)/\partial(\mu_1,\ \mu_2)=0$. Линия $\Delta=0$ удовлетворяет уравнению $\sin 2\nu=4\rho^2/(1+4\rho^4)$ и состоит из двух ветвей $\rho^2=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\nu$, $\rho^2=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\nu$ (фиг. 1). Можно показать, что на плоскости Ox_1x_2 ветвь $\rho^2=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\nu$ является огибающей линий скольжения μ_1 и линией возврата семейства μ_2. Аналогично ветвь $\rho^2=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\nu$ является огибающей семейства линий скольжения μ_2 и линией возврата семейства μ_1. Приращение угла θ на плоскости Ox_1x_2 не может быть больше 2π. Поэтому в (1.4) можно рассматривать только такие параметры, при которых приращение θ меньше 2π. Таким образом, рассматривая отображение различных областей на плоскости $(\mu_1,\ \mu_2)$, внутри которых $\Delta\neq 0$ и изменение θ меньше 2π, на плоскость Ox_1x_2, можно получать различные интегралы уравнений (1.1). Полученные интегралы можно интерпретировать как точные решения соответствующих краевых задач.

Построим на плоскости $(\mu_1,\ \mu_2)$ линии $\theta=\theta^0=\mathrm{const}$ и рассмотрим частные решения (1.4). Из (1.4) следует, что области, симметричные на $(\mu_1,\ \mu_2)$ относительно биссектрисы $\mu_1=\mu_2$, на плоскости Ox_1x_2 симметричны относительно прямой $\theta=0$. Если $0\leqslant\theta^0\leqslant\pi/4$, то линия $\theta=\theta^0$ определена при $0\leqslant\nu\leqslant\pi/4$; $\pi/4+\theta^0\leqslant\nu\leqslant\pi/2$; если $\theta^0>\pi/4$, то при $0\leqslant\nu<\pi/4$. При $\theta=\theta_0>0$; $0\leqslant\nu<\pi/4$ и $r\to\infty$ угол $\delta\to\pi/4$ и давление $\sigma\to\infty$; если же $0<\theta^0<\pi/4$; $\pi/4+\theta_0<\nu\leqslant\pi/2$ и $r\to\infty$, то $\delta\to\pi/4-\theta^0$; $\sigma\to 0$. Кроме того, $\left.\frac{d\mu_1}{d\mu_2}\right|_{\theta=\theta^0>0}\gtrless 0$ при $\cos 2\nu\times\left(\rho^2-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\nu\right)\gtrless 0$. Рассмотрим течение, соответствующее на $(\mu_1,\ \mu_2)$ об-



Фиг. 1



Фиг. 2

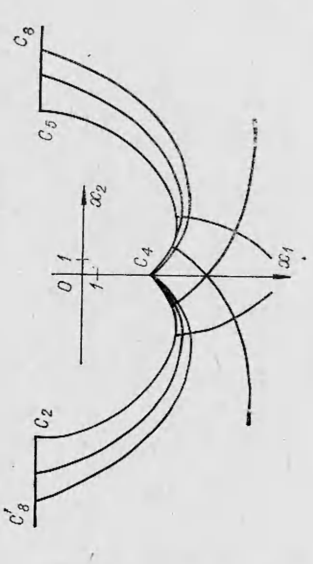
ласти $A_1A_3A_4A_6A_1$ (фиг. 1). Область $A_1A_3A_4A_6A_1$ отображается на симметричную клинообразную область $B_1B_3B_4B_6B_1'$ (фиг. 2). Угол раствора клина равен $\pi/2$. Сторона $B_4B_3B_1$ является огибающей семейства линий μ_1. На участке $B_3B_1 \frac{1}{2}$ arccos $(1-\sqrt{5})/2 < \nu < \pi/2$ кривая $B_4B_3B_1$ вогнута, на участке B_4B_3 $\pi/4 \leqslant \nu < \frac{1}{2}$ arccos $(1-\sqrt{5})/2$ выпукла; при $r \to \infty$ $\theta(B_1) \to \pi/4$. На сторонах клина действуют постоянное касательное напряжение $\tau=k$ и стремящееся к нулю при $r \to \infty$ нормальное напряжение. При $x_1 \to \infty$ напряженное состояние внутри клина стремится к равномерному, линии скольжения стремятся к прямым $x_2 = \pm x_1 + \text{const}$, угол $\varphi \to \pi/2$ и сжатие $\sigma \to 0$.

Рассмотрим течения, примыкающие с двух сторон к кривой A_4A_5 и ограниченные этой кривой и линией $\mu_2 = \overset{0}{\mu}_2 = \text{const}$; $0 < \overset{0}{\mu}_2 \leqslant 1/2$. На физической плоскости эти течения имеют форму рожка. Внутренняя граница течений является огибающей линий скольжения μ_1, внешняя — одна из линий μ_1. При $\theta \to \infty$ внутренняя и внешняя границы стремятся к дугам окружностей. Похожее течение (по Гартману), ограниченное логарифмическими спиралями, приводится в [2].

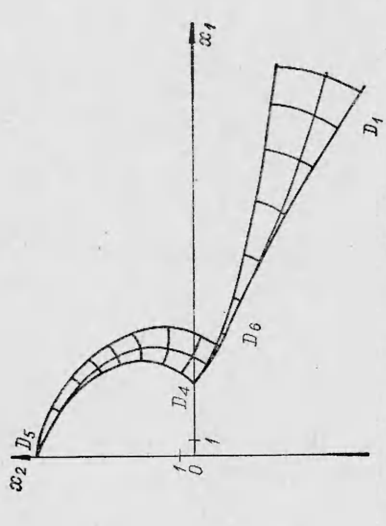
Рассмотрим течение, примыкающее к прямой $\mu_1=\mu_2$ и ограниченное линиями A_4A_5, A_4A_2 и $x_1 = \overset{0}{x}_1 = \text{const}$ (фиг. 1, 3). Для определенности $\overset{0}{x}_1$ выберем так, чтобы на плоскости Ox_1x_2 прямая C_5C_8 была нормальна к кривой C_5C_4. Можно показать, что в точке $C_5 \cos 2\nu = \frac{3}{2}\pi \operatorname{tg} \nu$. На границе C_4C_5 действует постоянное касательное напряжение, на поверхности C_5C_8 при $x_2 \to \infty$ касательное напряжение быстро убывает ($\delta \to \pi/4$), а нормальное возрастает ($\rho \to \infty$). Непосредственно к границе C_4C_5 примыкает течение в виде рожка.

На фиг. 4 изображены линии скольжения течения, соответствующего области $A_5A_4A_6A_1$ (фиг. 1). Границы $Д_4Д_5$, $Д_4Д_6Д_1$ являются огибающими семейств линий скольжения μ_1, μ_2. К границе $Д_4Д_5$ примыкает течение в виде рожка, к границе $Д_4Д_6Д_1$ — в виде клина.

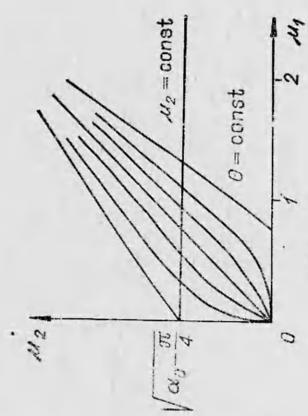
Далее рассмотрим течения, ограниченные на плоскости (μ_1, μ_2) кривыми A_4A_5, $\theta=\theta^0$, $\theta=\theta^0+\psi^0$, $|\psi^0| < 2\pi$ и осью $\mu_2=0$. При $\theta^0 \to \infty$ внутренняя естественная граница течения и все линии скольжения μ_1 стремятся к окружностям, а линии скольжения μ_2 — к радиусам $\theta = \text{const}$. Если течение на (μ_1, μ_2) ограничено кривыми $\theta=\theta^0$, $\theta=\theta^0+\psi^0$



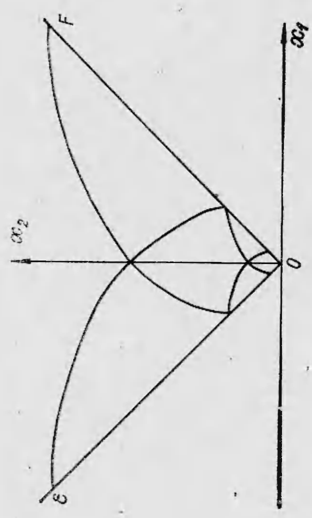
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

и условием $\rho^2 \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\nu$, то при $\theta^0 \to \infty$ внутренняя граница течения стремится к окружности, а оба семейства линий скольжения при $r \to \infty$ — к логарифмическим спиралям.

Аналогичные течения реализуются при отображении областей $\mu_1 \leqslant \mu_2$.

3. Пусть в решении (1.4) приняты нижние знаки. В этом случае действительных линий ветвления нет и в формулах (1.4) можно брать любые параметры, при которых приращение угла θ меньше 2π. Построим в плоскости (μ_1, μ_2) линии $\theta=\theta^0=\pi/2-\alpha_0$. Можно показать, что на плоскости (μ_1, μ_2) линии $\pm\ \alpha_0$ симметричны относительно биссектрисы $\mu_1=\mu_2$. Если $|\alpha_0| \leqslant \pi/4$, то линия $\theta=\theta^0$ проходит через начало координат $\mu_1=\mu_2=0$, причем угол наклона линии в начале координат равен $\pi/4+\alpha_0$. Если $|\alpha_0| \geqslant \pi/4$, то линии $\theta=\theta^0$ начинаются в точках $\rho=\sqrt{|\alpha_0|-\pi/4}$, $\nu=0$ при $\alpha_0<0$ и $\nu=\pi/2$ при $\alpha_0>0$. При $\rho\to\infty$ все линии $\theta=\theta^0$ стремятся к биссектрисе $\mu_1=\mu_2$ (фиг. 5).

Область $|\alpha_0| \leqslant \pi/4$ отображается на четвертьплоскость $\mathscr{E}OF$ (фиг. 6). При $x_2\to\infty$ напряженное состояние внутри четвертьплоскости стремится к равномерному, линии скольжения стремятся к прямым $x_2=\pm\ x_1+\mathrm{const}$, $\varphi\to\pi/2$ и $\sigma\to 0$. Остальные области между кривыми $\theta=\mathrm{const}$ отображаются на соответствующие клинья в плоскости Ox_1x_2. При $|\alpha_0|>\pi/4$, $\theta=\theta^0$ и $r\to\infty$ сжатие $\sigma/2k$ стремится к конечной величине $|\alpha_0|-\pi/4$, угол $\varphi\to\theta^0+\pi/4$ при $\alpha_0>0$ и $\varphi\to\theta_0-\pi/4$ при $\alpha_0<0$. При $r\to 0$ и любом θ^0 линии скольжения стремятся к логарифмическим спиралям $\delta=-\pi/4$, $\varphi\to\theta^0$, $\sigma\to\infty$. Линия скольжения $\mu_2=\mu_2^0=\mathrm{const}$ при $\nu\to 0$ стремится к началу координат $x_1=x_2=0$, при этом угол $\theta\to\infty$. Если $\nu\to\pi/2$, то линия скольжения асимптотически приближается к прямой $\theta=\frac{\pi}{4}-(\mu_2^0)^2$. Начало координат $x_1=x_2=0$ в данном решении является особой точкой.

4. При необходимости области течений (1.4) можно ограничивать введением жестких зон или граничных поверхностей. Точно так же из решений можно исключать и особые точки.

Напряжениям (1.4) соответствует некоторое распределение скоростей. Предположим, что материал несжимаем и тензоры напряжений и скоростей деформаций соосны. Так как напряжения известны из (1.4), то уравнения для скоростей можно свести к системе телеграфных уравнений в плоскости, отображение которой на физическую плоскость известно. Исследование последних может быть проведено обычными методами с помощью функции Римана [1].

В заключение выпишем в исходной системе координат уравнения линий скольжения и выражения для напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}. В характеристических координатах μ_1, μ_2 решение (1.4) имеет вид

$$\frac{\sigma}{2k}=\mu_1^2+\mu_2^2;\quad \varphi=\mu_1^2-\mu_2^2+\frac{\pi}{2}; \tag{4.1}$$

$$r=\frac{\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}}{\mu_1\mu_2}e^{\pm 2\mu_1\mu_2};\quad \theta=\mu_1^2-\mu_2^2+\operatorname{arctg}\frac{\mu_1}{\mu_2}+\frac{\pi}{4}. \tag{4.2}$$

При $\mu_2=\mathrm{const}$ ($\mu_1=\mathrm{const}$) и переменном $\mu_1(\mu_2)$ радиус-вектор, определяемый формулами (4.2), описывает в плоскости Ox_1x_2 одну из линий скольжения семейства $\mu_1(\mu_2)$. При этом соответствующие напряжения можно вычислить по правилам тензорного проектирования и формулам (4.1)

$$\sigma_{11} = \sigma + k\cos 2\varphi = 2k\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right) - k\cos 2\left(\mu_1^2 - \mu_2^2\right);$$
$$\sigma_{22} = \sigma - k\cos 2\varphi = 2k\left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right) + k\cos 2\left(\mu_1^2 - \mu_2^2\right);$$
$$\sigma_{12} = k\sin 2\varphi = -k\sin 2\left(\mu_1^2 - \mu_2^2\right).$$

Автор выражает благодарность Е. И. Шемякину за ценные замечания.

Поступила 18 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фрейденталь А., Гейрингер X.** Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
2. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М., «Мир», 1969.