ПМТФ, № 5, 1970

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ-ТЕЙЛОРА В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ В ГАЛЬВАНИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Э. П. Зимин, О. А. Эйсмонт

(Москва)

В работе рассматривается устойчивость границы раздела вязких проводящих сред при наличии тока и магнитного поля при магнитном числе Рейнольдса много меньше единицы. Для получения дисперсионного соотношения используется метод, основанный на вариационном принципе. Показано, что указанный метод дает хорошие результаты при учете магнитного поля. Приводится зависимость максимального инкремента нарастания неустойчивости от определяющих параметров. Решена также задача об устойчивости слоя жидкости, находящейся между твердыми стенками, при линейно распределенных проводимости и плотности. Показано стабилизирующее влияние числа Гартмана на устойчивость.

Исследованию устойчивости типа Рэлея — Тейлора в магнитной гидродинамике при конечной проводимости среды посвящен ряд работ, например [1-4]. В большинстве этих работ рассматривалась устойчивость границы раздела сред с разными плотностями и проводимостями при наличии гравитационного и магнитного полей, причем внешнее магнитное поле полагалось постоянным, т. е. в равновесном состоянии токи принимались равными нулю.

Предположение о постоянстве магнитного поля, позволяющее в ряде случаев получить аналитическое решение задачи, исключает интересный случай устойчивости токового слоя. В общем случае задача о колебаниях в токовом слое с конечной проводимостью среды оказывается весьма сложной [4].

В то же время в целом ряде случаев, представляющих практический интерес, влияние магнитного поля, индуцируемого токами, текущими в жидкости, относительно мало, и задачу об устойчивости токового слоя в гравитационном и магнитном полях можно решать в гальваническом приближении. Такой подход предложен впервые в работе [5], где получены дисперсионные соотношения для объемных и поверхностных волн в отсутствие вязкости и внешнего электрического поля.

В работе [6] рассматривалась задача об устойчивости границы раздела двух сред с различными проводимостями с учетом вязкости среды и конечности градиента проводимости. Однако в ней не учитывались, без достаточных на то оснований, токи, индуцированные возмущенным движением среды, и в то же время возмущения напряженности электрического поля полагались отличными от нуля, что в указанной постановке не является корректным. В работе [7] сделана попытка получить гальваническое приближение путем предельного перехода $R_m \to 0$ в окончательных уравнениях для возмущений: при этом автоматически выпадали возмущения электрического поля, но сохранялись возмущения магнитного поля.

Наконец, в работе [8] приведены лишь дисперсионные соотношения, полученные при $R_m \ll 1$ для двух частных случаев: при отсутствии вязкости среды и при малости параметра взаимодействия. Кроме того, в этой работе снова учитывались возмущения магнитного поля. Указанные обстоятельства побуждают еще раз рассмотреть эту задачу.

1. Рассмотрим устойчивость бесконечного плоского слоя несжимаемой, вязкой и проводящей жидкости, находящегося в контакте либо с аналогичными слоями, характеризующимися другими значениями плотности, вязкости и проводимости, либо со стенками. Нормально к невозмущенной границе приложено гравитационное поле с постоянным ускорением $\mathbf{g}\,(0,\ 0,\ -g)$. Вдоль оси x направлено однородное магнитное поле B, а вдоль оси y — электрическое поле E_0. Здесь и далее индексом о отмечены параметры, соответствующие невозмущенному равновесному состоянию.

Исходная система уравнений в общепринятых обозначениях имеет вид

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p + \nabla(\mu\nabla\mathbf{V}) + (\nabla\mu)(\nabla\mathbf{V}) + \rho\mathbf{g} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V}\times\mathbf{B}), \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$$

Если пренебречь диффузией, то для плотности можно записать уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\rho = 0$$

Полагая проводимость и вязкость зависящими только от плотности, получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\sigma = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mu = 0$$

Равновесное состояние, при котором $\mathbf{V}_0 = 0$ и параметры ρ_0, σ_0 и μ_0 являются функциями только одной координаты z, определяется уравнением

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g - \sigma_0 E_0 B$$

Для исследования устойчивости такого состояния введем малые возмущения всех параметров в виде $f(z) \exp(ik_x + ik_y + nt)$.

После линеаризации исходной системы (1.1) ее можно свести к одному уравнению для возмущения компоненты скорости вдоль оси z

$$n\left[\rho_0 W - \frac{1}{k^2} D(\rho_0 DW)\right] + \frac{k_x^2}{k^2}\sigma_0 B^2 W + \frac{1}{k^2} D[\mu_0(D^2 - k^2)DW] +$$
$$+ \frac{1}{k^2} D[D\mu_0(D^2 + k^2)W] - \mu_0(D^2 - k^2)W - 2D\mu_0 DW -$$
$$-\frac{1}{n}\left(gD\rho_0 + \frac{k_x^2}{k^2}E_0 BD\sigma_0\right)W = 0 \qquad (1.2)$$

Здесь $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, $D \equiv d/dz$.

Это уравнение должно быть дополнено граничными условиями, которые имеют такой же вид, как и в отсутствие магнитного поля [10], так как наличие последнего не повысило порядок уравнения. Таким образом, имеем либо $W = DW = 0$ на твердой границе или на бесконечности, если рассматривается неограниченная среда, либо $W = D^2W = 0$ на свободной поверхности, а также непрерывность W, DW, $\mu_0(D^2 + k^2)W$ и

$$\left[\rho_0 - \frac{\mu_0}{n}(D^2 - k^2)\right]DW + \frac{2k^2}{n}\mu_0 DW + \frac{1}{n^2}(gk^2\rho_0 + k_x^2 E_0 B\sigma_0)W$$

на границе разделела слоев.

2. Рассмотрим далее задачу об устойчивости границы раздела двух полубесконечных невязких сред с постоянными плотностями и проводимостями в гравитационном и магнитном полях. Из уравнения (1.2) легко получаем с учетом граничных условий на бесконечности

$$W^{(1)} = Ce^{\alpha_1 z}, \quad W^{(2)} = Ce^{-\alpha_2 z}$$

где

$$\alpha_i^2 = \frac{k_x^2 B^2 \sigma_0^{(i)}}{n\rho_0^{(i)}} + k^2, \quad \mathrm{Re}(\alpha_i) > 0, \quad i = 1, 2$$

Используя условия непрерывности скорости и давления на границе раздела сред, получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$n^2\left[\rho_0^{(1)}\left(\frac{k_x^2 B^2 \sigma_0^{(1)}}{n\rho_0^{(1)}} + k^2\right)^{1/2} + \rho_0^{(2)}\left(\frac{k_x^2 B^2 \sigma_0^{(2)}}{n\rho_0^{(2)}} + k^2\right)^{1/2}\right] =$$
$$= k^2 g(\rho_0^{(2)} - \rho_0^{(1)}) + k_x^2 E_0 B(\sigma_0^{(2)} - \sigma_0^{(1)}) \qquad (2.1)$$

В случае, когда проводимость одной из сред равна нулю ($\sigma_0^{(1)}=0$), (2.1) можно привести к уравнению четвертой степени относительно n

$$n^4-\frac{k_x^2}{k^2}\,\frac{B^2\sigma_0^{(2)}\rho_0^{(2)}}{\rho_0^{(1)2}-\rho_0^{(2)2}}\,n^3-\frac{2\left[g\left(\rho_0^{(2)}-\rho_0^{(1)}\right)k^2+k_x^2E_0B\sigma_0^{(2)}\right]\rho_0^{(1)}}{k\left(\rho_0^{(1)2}-\rho_0^{(2)2}\right)}\,n^2+$$
$$+\frac{k^2}{\rho_0^{(1)2}-\rho_0^{(2)2}}\left[g\left(\rho_0^{(2)}-\rho_0^{(1)}\right)+\frac{k_x^2}{k^2}E_0B\sigma_0^{(2)}\right]^2=0 \qquad (2.2)$$

При $\rho_0^{(1)}=0$ и $E_0=0$ это уравнение сводится к полученному в работе [5] в отсутствие составляющей магнитного поля вдоль оси z.

Таким образом, даже сравнительно несложная задача приводит к необходимости ее численного решения. Поэтому заслуживают внимания приближенные методы, позволяющие достаточно просто получать решения поставленной задачи в более общих, чем только что рассмотренный, случаях в смысле граничных условий и начального распределения невозмущенных величин. Один из подобных методов рассмотрен в п. 3.

3. Еще в 1883 г. в работе [9] на основе вариационного принципа предложен эффективный метод решения задачи об устойчивости идеальной жидкости. В работе [10] этот метод обобщен на случай вязких жидкостей. Ниже указанный метод обобщается на случай проводящих жидкостей при $R_m \ll 1$.

Вернемся к уравнению (1.2). Пусть собственному значению n_i соответствует собственная функция W_i, а значению n_j — W_j. Умножая тогда уравнение (1.2), записанное для случая i на W_j и интегрируя в пределах рассматриваемой области течения, будем иметь после интегрирования отдельных членов по частям с учетом граничных условий

$$-n_i\int\rho_0\left[W_iW_j+\frac{1}{k^2}(DW_i)(DW_j)\right]dz+\frac{g}{n_i}\int(D\rho_0)\,W_iW_jdz+$$
$$+\frac{1}{n_i}\,\frac{k_x^2}{k^2}E_0B\int(D\sigma_0)\,W_iW_jdz=\frac{k_x^2}{k^2}B^2\int\sigma_0W_iW_jdz+$$
$$+\int\mu_0\left[k^2W_iW_j+2(DW_i)(DW_j)+\frac{1}{k^2}(D^2W_i)(D^2W_j)\right]dz+$$
$$+\int(D^2\mu_0)\,W_iW_jdz \qquad (3.1)$$

Здесь и в дальнейшем пределы интегрирования, совпадающие с границами области течения, опускаются.

Заменяя теперь индекс i на j и вычитая из полученного таким образом уравнения уравнение (3.1), будем иметь

$$(n_j-n_i)\left\{\int\rho_0\left[W_iW_j+\frac{1}{k^2}(DW_i)(DW_j)\right]dz+\frac{g}{n_in_j}\int(D\rho_0)\,W_iW_jdz+\right.$$
$$\left.+\frac{E_0B}{n_in_j}\,\frac{k_x^2}{k^2}\int(D\sigma_0)W_iW_jdz\right\}=0 \qquad (3.2)$$

Записав (3.1) в виде

$$g\int(D\rho_0)\,W_iW_jdz+\frac{k_x^2}{k^2}E_0\int(D\sigma_0)\,W_iW_jdz=$$
$$=n_i^2\int\rho_0\left[W_iW_j+\frac{1}{k^2}(DW_i)(DW_j)\right]dz+n_i\frac{k_x^2}{k^2}B^2\int\sigma_0W_iW_jdz+$$
$$+n_i\int\mu_0\left[k^2W_iW_j+2(DW_i)(DW_j)+\frac{1}{k^2}(D^2W_i)(D^2W_j)\right]dz+$$
$$+n_i\int(D^2\mu_0)\,W_iW_jdz$$

и проделав аналогичные операции, найдем

$$(n_i+n_j)\int\rho_0\Big[W_iW_j+\frac{1}{k^2}(DW_i)(DW_j)\Big]dz+\frac{k_x^2}{k^2}B^2\int\sigma_0W_iW_jdz+$$
$$+\int\mu_0\Big[k^2W_iW_j+2(DW_i)(DW_j)+\frac{1}{k^2}(D^2W_i)(D^2W_j)\Big]dz+$$
$$+\int(D^2\mu_0)W_iW_jdz=0 \qquad (3.3)$$

Предположим теперь, что n_i и n_j — комплексно сопряженные величины, тогда им будут соответствовать комплексно сопряженные значения W_i и W_j. При этом из (3.2) будет следовать

$$\operatorname{Im}(n)\Big\{\int\rho_0\Big[|W|^2+\frac{1}{k^2}|DW|^2\Big]dz+$$
$$+\frac{1}{|n|^2}\int\Big[g(D\rho_0)+\frac{k_x^2}{k^2}E_0B(D\sigma_0)\Big]|W|^2dz\Big\}=0$$

т. е. если

$$g(D\rho_0)+\frac{k_x^2}{k^2}E_0B(D\sigma_0)>0$$

то n не может быть комплексным.

Аналогичным образом из (3.3) имеем

$$2\operatorname{Re}(n)\int\rho_0\Big[|W|^2+\frac{1}{k^2}|DW|^2\Big]dz=-B^2\frac{k_x^2}{k^2}\int\sigma_0|W|^2dz-$$
$$-\int\mu_0\Big[k^2|W|^2+2|DW|^2+\frac{1}{k^2}|D^2W|^2\Big]dz-\int(D^2\mu_0)|W|^2dz$$

откуда следует, что если $D^2\mu_0\geqslant 0$, то $\operatorname{Re}(n)<0$, если же $D^2\mu_0<0$ и $|D^2\mu_0|$ достаточно велико, то возможен случай $\operatorname{Re}(n)>0$.

Полагая в (3.1) $i=j$, получаем

$$n\int\rho_0\Big[W^2+\frac{1}{k^2}(DW)^2\Big]dz-$$
$$-\frac{g}{n}\int(D\rho_0)W^2dz-\frac{E_0B}{n}\frac{k_x^2}{k^2}\int(D\sigma_0)W^2dz=$$
$$=-B^2\frac{k_x^2}{k^2}\int\sigma_0W^2dz-\int\Big\{\mu_0\Big[k^2W^2+2(DW)^2+\frac{1}{k^2}(D^2W)^2\Big]+$$
$$+(D^2\mu_0)W^2\Big\}dz \qquad (3.4)$$

Соотношение (3.4) позволяет на основании вариационного принципа, аналогичного рассмотренному в работе [10], определять собственные значения n. Найдем отклонение δn собственного значения n, вызываемое малым отклонением δW, которое удовлетворяет граничным условиям. С точностью до величин второго порядка малости будем иметь

$$-\Big(I_1+\frac{g}{n^2}I_2+\frac{1}{n^2}I_3\Big)\delta n=n\delta I_1-\frac{g}{n}\delta I_2-\frac{1}{n}\delta I_3+\delta I_4+\delta I_5 \qquad (3.5)$$

где

$$I_1=\int\rho_0\Big[W^2+\frac{1}{k^2}(DW)^2\Big]dz,\quad I_2=\int(D\rho_0)W^2dz$$
$$I_3=\frac{k_x^2}{k^2}E_0B\int(D\sigma_0)W^2dx,\quad I_4=\frac{k_x^2}{k^2}B^2\int\sigma_0W^2dz$$
$$I_5=\int\Big\{\mu_0\Big[k^2W^2+2(DW)^2+\frac{1}{k^2}(D^2W)^2\Big]+(D^2\mu_0)W^2\Big\}dz$$

δI_i — соответствующие отклонения интегралов

$$\frac{1}{2}\delta I_1 = \int\left[\rho_0 W - \frac{1}{k^2}D(\rho_0 DW)\right]\delta W dz, \quad \frac{1}{2}\delta I_2 = \int (D\rho_0) W\delta W dz$$

$$\frac{1}{2}\delta I_3 = \frac{k_x^2}{k^2}E_0 B\int (D\sigma_0) W\delta W dz, \quad \frac{1}{2}\delta I_4 = \frac{k_x^2}{k^2}B^2\int \sigma_0 W\delta W dz$$

$$\frac{1}{2}\delta I_5 = \frac{1}{k^2}\int\{\mu_0(D^2-k^2)W + 2(D\mu_0)(D^2-k^2)DW +$$

$$+ (D^2\mu_0)(D^2+k^2)W\}\delta W dz \tag{3.6}$$

Подставляя выражения (3.6) в уравнение (3.5) и проводя несложные преобразования, получаем

$$-\frac{1}{2}\left(I_1 + \frac{g}{n^2}I_2 + \frac{1}{n^2}I_3\right)\delta n = \int\Big\{n\rho_0 W - \frac{g}{n}(D\rho_0)W -$$

$$- \frac{n}{k^2}D(\rho_0 DW) - \frac{E_0 B}{n}\frac{k_x^2}{k^2}(D\sigma_0)W + \frac{k_x^2}{k^2}B^2\sigma_0 W + \tag{3.7}$$

$$+ \frac{1}{k^2}D[\mu_0(D^2-k^2)DW] + \frac{1}{k^2}D[D\mu_0(D^2+k^2)W] -$$

$$- \mu_0(D^2-k^2)W - 2(D\mu_0)(DW)\Big\}\delta W dz$$

Используя теперь исходное уравнение (1.2), будем иметь

$$\left(I_1 + \frac{g}{n^2}I_2 + \frac{1}{n^2}I_3\right)\delta n = 0$$

откуда следует $\delta n = 0$, так как выражение в скобках в общем случае не равно нулю.

Следовательно, малым отклонениям собственной функции δW от ее истинного значения, удовлетворяющим граничным условиям, соответствует истинное с точностью до величин второго порядка малости значение n, определяемое из уравнения (3.4).

4. Рассмотрим далее задачу об устойчивости границы раздела ($z = 0$) вязких проводящих жидкостей, ограниченных твердыми стенками ($-h^{(1)}$, $h^{(2)}$), пользуясь изложенным выше вариационным принципом. Как показано в работе [11], применение вариационного принципа для решения поставленной задачи в отсутствие магнитного поля (когда вязкости жидкостей различны) нецелесообразно. Однако в рассматриваемой постановке можно ограничиться случаем, когда вязкости жидкостей одинаковы и они различаются только величинами проводимости, что может иметь место, например, в неоднородно нагретом газе, проводимость которого весьма сильно зависит от температуры, а плотность и вязкость меняются существенно меньше. Отметим, что подобная постановка в отсутствие магнитного поля не имеет смысла. В качестве приближенного выражения для возмущения скорости примем его известное точное значение для случая идеальной жидкости в отсутствие магнитного поля

$$W^{(1)} = A\left(e^{-kz} - e^{2kh^{(1)}+kz}\right), \qquad W^{(2)} = A\frac{1-e^{2kh^{(1)}}}{1-e^{-2kh^{(2)}}}\left(e^{-kz} - e^{-2kh^{(2)}+kz}\right)$$

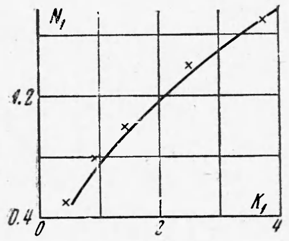
Подставляя эти выражения в уравнение (3.4) и производя интегрирование, получаем следующее дисперсионное соотношение;

$$\rho_0(\operatorname{cth} kh^{(1)} + \operatorname{cth} kh^{(2)})n^2 + \left\{\frac{k_x^2}{k}B^2\left[\frac{1}{2k}(\sigma_0^{(1)}\operatorname{cth} kh^{(1)} + \sigma_0^{(2)}\operatorname{cth} kh^{(2)}) -\right.\right.$$

$$
-\frac{2e^{2kh^{(1)}}}{(e^{2kh^{(1)}}-1)^2}\left(h^{(1)}\sigma_0^{(1)}+h^{(2)}\sigma_0^{(2)}\right)\Big]+2k^2\mu_0\left(\operatorname{cth} kh^{(1)}+\operatorname{cth} kh^{(2)}\right)\Big\}n-
$$

$$
-\frac{k_x^2}{k^2}E_0B\left(\sigma_0^{(2)}-\sigma_0^{(1)}\right)=0 \qquad (4.1)
$$

Пусть теперь $h^{(1)}, h^{(2)} \to \infty$ и жидкости невязкие, тогда (4.1) принимает вид



Фиг. 1

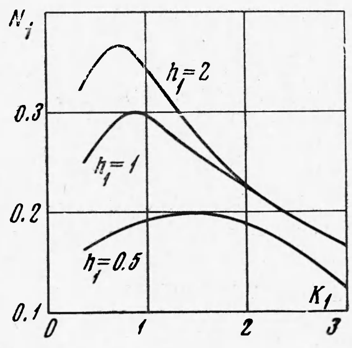
$$
N_1^2 + {}^1/_2 N_1 - K_1 = 0
$$

где

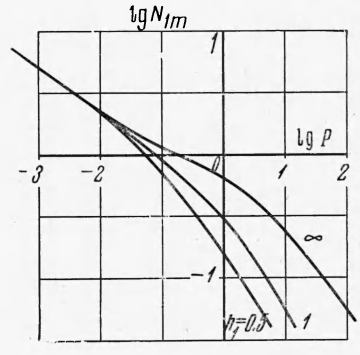
$$
N_1 = \frac{2\rho_0 n}{(\sigma_0^{(1)}+\sigma_0^{(2)})B^2}, \quad K_1 = \frac{2\rho_0 E_0(\sigma_0^{(2)}-\sigma_0^{(1)})k}{(\sigma_0^{(1)}+\sigma_0^{(2)})^2 B^2}
$$

Нетрудно убедиться, что в случае неустойчивости ($E_0B(\sigma_0^{(2)}-\sigma_0^{(1)})>0$) наиболее опасные колебания распространяются вдоль магнитного поля. Ниже всюду анализируется именно этот случай, т. е. $k_y = 0$

Зависимость N_1 (K_1) при $\sigma_0^{(1)} = 0$ приведена на фиг. 1. Крестиками отмечены результаты точного решения задачи на основе соотношения (2.2). Таким образом, выбранное приближение для возмущения скорости дает вполне удовлетворительные результаты при учете магнитного поля.



Фиг. 2



Фиг. 3

В рассматриваемой постановке ($\mu_0 = \text{const}$) указанное приближение, по-видимому, дает хорошие результаты и при учете вязкости [11].

Вернемся теперь к соотношению (4.1) при $h^{(1)} = h^{(2)} = h$ и $k_y = 0$ и запишем его в безразмерном виде

$$
N_1^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{K_1h_1}{\operatorname{sh} 2K_1h_1} + 2K_1^2P\right)N_1 - K_1 \operatorname{th} K_1h_1 = 0
$$

где

$$
P = \frac{\mu_0 B^4(\sigma_0^{(1)}+\sigma_0^{(2)})^3}{2\rho_0^2E_0^2(\sigma_0^{(2)}-\sigma_0^{(1)})^2}, \quad h_1 = \frac{hB^3(\sigma_0^{(1)}+\sigma_0^{(2)})^2}{2\rho_0E_0(\sigma_0^{(2)}-\sigma_0^{(1)})}
$$

Нетрудно получить асимптотические выражения для максимального инкремента нарастания неустойчивости N_{1m} в функции от P.

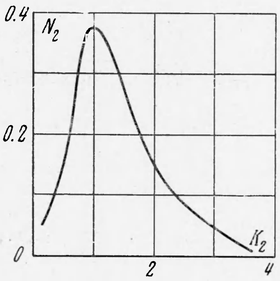
Для случая $h_1 \to \infty$ будем иметь

$$N_{1m} \to {}^1/_2 P^{1/3} \quad \text{при } P \to 0$$

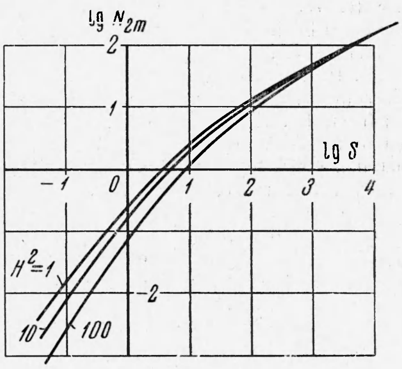
$$N_{1m} \to {}^2/_5 P^{1/2} \text{при } P \to \infty$$

Если h_1 конечно, то при $P \to 0$ для N_{1m} получаем прежнее выражение, если же $P \to \infty$, то $N_{1m} \to h_1 \,/\, 2P$.

Зависимость $N_1 (K_1)$ для этого случая при $P = 1$ представлена на фиг. 2. На фиг. 3 приведена зависимость максимального инкремента нарастания неустойчивости от параметра P при различных значениях h_1. Видно стабилизирующее влияние стенок на устойчивость границы раздела сред.



Фиг. 4



Фиг. 5

5. Пусть теперь плотность, проводимость и вязкость среды, которая заключена между свободными поверхностями, расположенными на расстоянии d друг от друга, распределены линейно

$$\rho_0 = \rho_{00} (1 + \beta_1 z), \quad \sigma_0 = \sigma_{00} (1 + \beta_2 z)$$

$$\mu_0 = \mu_{00} (1 + \beta_3 z), \; (|\beta_i d| \ll 1)$$

Тогда решение исходного уравнения (1.2) можно записать следующим образом;

$$W = A \sin \frac{m\pi}{d} z, \text{ где } m = 1, 2, \ldots$$

и дисперсионное соотношение будет иметь вид

$$N_2{}^2 + 2\left[(m^2 + K_2{}^2) + \frac{k_x{}^2}{k^2} \frac{H^2}{(m^2 + K_2{}^2)}\right] N_2 - \left[G + \frac{k_x{}^2}{k^2} F\right] \frac{K_2{}^2}{m^2 + K_2{}^2} = 0$$

где

$$N_2 = \frac{2\, d^2 n \rho_{00}}{\pi \mu_{00}}, \quad K_2 = \frac{dk}{\pi}, \quad H^2 = \frac{B^2 d^2 \sigma_{00}}{\pi^2 \mu_{00}}, \quad G = \frac{4\, g \beta_1 d^4 \rho_{00}{}^2}{\pi^4 \mu_{00}{}^2}, \quad F = \frac{4\, E_0 B \beta_2 d^4 \rho_{00}{}^2}{\pi^4 \mu_{00}{}^2}$$

График $N_2 (K_2)$ при $H^2 = 1$, $k_y = 0$, $G + F = S = 1$ показан на фиг. 4.

Рассмотрим снова случай неустойчивости системы, т. е. $S > 0$: при этом наиболее опасные колебания распространяются, как и ранее, вдоль магнитного поля. Нетрудно показать, что N_2 достигает максимума при

$m = 1$, поэтому ниже анализируется именно этот случай. На фиг. 5 приведена зависимость максимального инкремента нарастания неустойчивости от параметра S при различных значениях числа Гартмана H. Видно, что с ростом числа Гартмана система стабилизируется, хотя это стабилизирующее влияние сравнительно невелико и проявляется при не слишком больших значениях S.

Поступила 4 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. J u k e s J. D. On the Rayleigh — Taylor problem in magnetohydrodynamics with finite resistivity. J. Fluid Mech., 1963, vol. 16, pt 2.
2. H i d e R. Waves in a heavy viscous, incompressible, electrically conducting fluid of a variable density in the presence of a magnetic field. Proc. Roy. Soc. 1955, vol. 233A, No 1194.
3. К и м К. И. Неустойчивость Релея — Тейлора в жидкометаллических синхронных МГД генераторах и способы ее стабилизации. Electr. MHD, Vienna 1968, vol. 3
4. F u r t h H. P., K i l l e e n J., R o s e n b l u t h M. N. Finite - resistivity instabilities of a sheet pinch. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No 4.
5. Б р а г и н с к и й С. И. К магнитной гидродинамике слабопроводящих жидкостей. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 5.
6. L e m a i r e A. Instabilite de Rayleigh — Taylor sous l'effet de forces electromagnetiques. Conf. Internat. Phenomenes Ionisat. Gaz., 6-eme, Paris, 1963.
7. Н г у е н Д а к. Изучение неустойчивости типа Релея — Тейлора в магнитной гидродинамике. В сб.: «Прямое преобразование тепловой энергии в электрическую», ВИНИТИ, 1968, вып. 7.
8. D e v i m e R., K a r r C., L e c r o a r t H., M a r l e C., N g u e n D u c X., M a l p a t J., P o r t e R. Evaluation des effets de l' instabilite de Rayleigh — Taylor et de la diffusion turbulente dans la conversion en veine inhomogene. Electr. MHD, Vienna, 1966, vol. 3, p. 501.
9. R a y l e i g h, L o r d Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of a variable density. Proc. London Math. Soc., 1883, vol. 14, pp. 170—177.
10. C h a n d r a s e k h a r S. The character of the equilibrium of an incompressible heavy viscous fluid of variable density. Proc. Cambr. Philos. Soc., 1955, vol. 51, pt 1.
11. R e i d W. H. The effects of surface tension and viscosity on the stability of two superposed fluids. Proc. Cambr. Philos. Soc., 1961, vol. 57, pt 2.