УДК 539.3+539.4

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Ю. В. Немировский, К. М. Шлемензон

(Новосибирск)

Анизотропные материалы волокнистой структуры находят все большее применение в технике. Особенность их состоит в широкой возможности регулирования структуры. В связи с этим конструкции и тела, изготовленные из них, обладают в общем случае не только анизотропными, но и непрерывно-неоднородными свойствами. Это обстоятельство наряду с возможностью изменения характера анизотропии и неоднородности диктует необходимость широкого и детального исследования поведения таких тел, в том числе при динамических нагрузках.

В данной работе выполнено исследование некоторых особенностей распространения упругих волн в анизотропных и неоднородных средах, в частности, исследована возможность динамической компактности волн напряжения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим непрерывно-неоднородную и анизотропную среду, ограниченную некоторой поверхностью S и простирающуюся вне ее до бесконечности. До момента времени $t=0$ среда находится в состоянии покоя. При $t=0$ точки поверхности S возмущаются некоторой системой нагрузок, в дальнейшем зависящих от времени. Задачей исследования является выявление (в линейной постановке) некоторых особенностей процесса распространения волн напряжений, порожденных этим возмущением.

Выпишем необходимые соотношения [1]:

уравнения движения

$$\rho^{-1}\nabla_i \sigma^{ij} = \ddot{u}^j; \tag{1.1}$$

закон Гука

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl}; \tag{1.2}$$

уравнения Коши

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(\nabla_k u_l + \nabla_l u_k). \tag{1.3}$$

Из (1.2), (1.3) с использованием свойств симметрии тензора жесткостей C^{ijkl} можно получить

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\nabla_k u_l. \tag{1.4}$$

Составим следующую комбинацию:

$$C^k_{lmj}\nabla_k(\rho^{-1}\nabla_i\sigma^{ij} - \ddot{u}^j) = 0.$$

С учетом (1.4) имеем

$$C^k_{lmj}\nabla_k(\rho^{-1}\nabla_i\sigma^{ij}) = \ddot{\sigma}_{lm}. \tag{1.5}$$

Система (1.5) есть основная разрешающая система уравнений в напряжениях теории упругости неоднородного анизотропного тела в криволинейной системе координат. Так как тензор напряжений симметричен, а компоненты тензора жесткостей C^k_{lmj} симметричны по индексам l и m, то количество независимых уравнений и количество неизвестных σ_{lm} совпадает и равно 6.

Для системы (1.5) поставим следующие краевые условия:

$$\sigma^{ij}\nu_j|_S = T^i H(t); \tag{1.6}$$

$$\sigma^{ij} = \dot{\sigma}^{ij} = 0 \text{ при } t = 0; \tag{1.7}$$

$$\sigma^{ij} \to 0 \text{ при } |x| \to \infty, \tag{1.8}$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда; $|x|$ — расстояние от поверхности S; ν_j — вектор единичной нормали к поверхности.

Уравнения типа (1.5) для однородной изотропной среды в декартовой системе координат иным путем были получены Игначаком (см. [2]) и представляются в виде

$$\frac{\rho}{\mu}\left(\ddot{\sigma}_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij}\ddot{\sigma}_{kk}\right) = \sigma_{ki,kj} + \sigma_{jk,ki}. \tag{1.9}$$

Полагая в (1.5)

$$C_{lmjk} = \lambda\delta_{lm}\delta_{jk} + \mu(\delta_{lk}\delta_{mj} + \delta_{lj}\delta_{mk}), \ \rho = \mathrm{const}$$

(λ, μ — параметры Ламе), можно показать эквивалентность уравнений (1.5), (1.9).

2. Вывод разрешающих соотношений краевой задачи. Будем считать, что механические параметры среды таковы, что в каждой фиксированной точке пространства уравнения движения (1.5) удовлетворяют условию гиперболичности. Поэтому скорость распространения возмущения должна быть конечной, и в решении краевой задачи (1.5) — (1.8) необходимо должна присутствовать поверхность разрыва $\Omega(x_\alpha, t) = 0$, отделяющая возмущенную область от состояния покоя. Следовательно, решение будем искать в классе разрывных функций.

Представим решение краевой задачи в виде произведения гладкой функции F^{ij} на обобщенную функцию Хевисайда H

$$\sigma^{ij} = F^{ij}(x_\alpha, t)H(\Omega), \tag{2.1}$$

которое автоматически удовлетворяет условиям излучения (1.8). Поверхность разрыва (фронт волны) заранее неизвестна. Ее можно будет найти из уравнения, определяющего необходимое условие существования решения вида (2.1).

Будем искать Ω в разрешенном относительно t виде

$$\Omega = t - \omega(x_\alpha), \tag{2.2}$$

где ω — гладкая функция координат, не зависящая от времени. Тогда (2.1) запишется как

$$\sigma^{ij} = F^{ij}(x_\alpha, \ t - \omega)H(t - \omega). \tag{2.3}$$

Вид решения (2.3) позволяет перейти к пространству изображений по формуле

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \int_0^\infty \sigma^{ij} e^{-pt} dt. \tag{2.4}$$

Учитывая возможность метода интегрального преобразования Лапласа (2.4) оперировать с импульсными функциями, будем предполагать их наличие в нашем решении

$$F^{ij} = z^{ij(-1)}\delta(t-\omega) + F_0^{ij}(x_\alpha, t-\omega), \tag{2.5}$$

где F_0^{ij}— аналитическая часть функции F^{ij}. Представим F_0^{ij} в (2.5) рядом Тейлора по времени в окрестности $t = \omega$ (т. е. в окрестности фронта волны). Тогда

$$F^{ij} = z^{ij(-1)}(x_\alpha)\,\delta(t-\omega) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{ij(n)}(x_\alpha)}{n!}(t-\omega)^n. \tag{2.6}$$

Фактически получили представление решения (2.3) в виде лучевого разложения [3].

Если теперь в (2.1) перейти к изображениям и воспользоваться (2.6), то получим

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{F}^{ij}e^{-p\omega} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{z^{ij(n)}}{p^{n+1}}e^{-p\omega}. \tag{2.7}$$

Представление (2.6), (2.7) позволяет автоматически строить решение в оригиналах, если оно известно в изображениях.

Для одномерной задачи о волне напряжения в неоднородном стержне представление, подобное (2.6), использовалось в работе [4] для определения изменения амплитуды волны на фронте при ее распространении.

Выпишем систему (1.5) в изображениях. пользуясь при этом условиями (1.7),

$$C^k_{lmj}\nabla_k\left(\rho^{-1}\nabla_i\tilde{\sigma}^{ij}\right) = p^2\tilde{\sigma}_{lm}. \tag{2.8}$$

Подставив соотношение (2.7) в (2.8), собирая члены при одинаковых степенях p и приравнивая их к нулю, получим

$$-L_{lm}(z^{ij(n-2)}) + M_{lm}(z^{ij(n-1)}) = D_{lm}(z^{ij(n)}), \tag{2.9}$$

где

$$D_{lm}(z^{ij}) = \rho^{-1}C^k_{lmj}\omega_{,i}\omega_{,k}z^{ij} - z_{lm}; \tag{2.10}$$

$$M_{lm}(z^{ij}) = C^k_{lmj}\{\nabla_k(\rho^{-1}\omega_{,i}z^{ij}) + \rho^{-1}\omega_{,k}\nabla_i z^{ij}\}; \tag{2.11}$$

$$L_{lm}(z^{ij}) = C^k_{lmj}\nabla_k(\rho^{-1}\nabla_i z^{ij}) \tag{2.12}$$

$(n = -1, 0, 1, 2, \ldots, i, j = 1, 2, 3)$.

Причем

$$z^{ij(-2)} \equiv z^{ij(-3)} \equiv 0.$$

3. О разрешимости рекуррентной системы уравнений (2.9). Можно показать, что для разрешимости (2.9) необходимо, чтобы система алгебраических уравнений

$$\left(\rho^{-1}C^k_{lmj}\omega_{,i}\omega_{,k} - g_{lj}g_{mi}\right)z^{ij(-1)} = 0 \tag{3.1}$$

имела нетривиальное решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы при неизвестных обращался в нуль [5]. Если расписать матрицу в (3.1) в декартовых координатах, то можно обнаружить линейное преобразование ее строк и столбцов (сохраняющих определитель), приводящих ее к виду

$$
\left|\begin{matrix} C_{il}^{jk}\omega_{,k}\omega_{,l}-\rho\delta_i^j & & . & 0 & 0 & 0\\ & & . & 0 & 0 & 0\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & . & 0 & 0 & 0\\ C_{12}^{1k}\omega_{,k}; & C_{12}^{2k}\omega_{,k}; & C_{12}^{3k}\omega_{,k}; & -\rho; & 0; & 0\\ C_{13}^{1k}\omega_{,k}; & C_{13}^{2k}\omega_{,k}; & C_{13}^{3k}\omega_{,k}; & 0; & -\rho; & 0\\ C_{23}^{1k},\ \omega_{,k}; & C_{23}^{2k}\omega_{,k}; & C_{23}^{3k}\omega_{,k}; & 0; & 0; & -\rho \end{matrix}\right| \tag{3.2}
$$

(по k, l — суммирование от 1 до 3). Отсюда видно, что в действительности определитель равняется

$$
-\rho^3 \det\left| C_{il}^{jk}\omega_{,k}\omega_{,l}-\rho\delta_i^j\right| = 0. \tag{3.3}
$$

Последнее уравнение является уравнением характеристик для (1.5), поверхности которых определяются равенством $\Omega = 0$ [6]. Граничные условия для функции ω следуют из условия совпадения поверхности S при $t = 0$ с поверхностью фронта, т. е.

$$
\omega\,|_S = 0. \tag{3.4}
$$

Если ввести понятия скорости фронта по нормали к нему и направляющих косинусов нормали по формулам [7]

$$
\begin{gathered} G_n = -\dot{\Omega}|\mathrm{grad}\ \omega|^{-1} = |\mathrm{grad}\ \omega|^{-1},\\ \nu_j = -\Omega_{,j}|\mathrm{grad}\ \omega|^{-1} = \omega_{,j}G_n, \end{gathered} \tag{3.5}
$$

то (3.3) можно переписать в эквивалентном виде

$$
\det\left| C_{il}^{jk}\nu_k\nu_l-\rho G_n^2\delta_i^j\right| = 0. \tag{3.6}
$$

Таким образом, задача нахождения G_n^2 из (3.6) сводится к определению собственных значений симметричной матрицы $G_{il}^{jk}\nu_k\nu_l$. Известно, что в этом случае все собственные значения матрицы вещественны. Отсюда следует, что в упругой среде вдоль любого заданного направления ν_j существуют ровно три возможные скорости распространения волн [8]. Несколько подробнее вопрос определения функции ω обсуждался в [3].

Как известно [5], применение элементарных преобразований со столбцами матрицы эквивалентно линейному преобразованию переменных в в (3.1). Оказывается, переход от матрицы (3.1) (для декартовых координат) к матрице (3.2) эквивалентен введению новых переменных

$$
y_i^{(-1)} = \sum_{j=1}^{3} z_{ij}^{(-1)}\omega_{,j}\quad (i=1,2,3),\quad y_4^{(-1)} = z_{12}^{(-1)},\quad y_5^{(-1)} = z_{13}^{(-1)},\quad y_6^{(-1)} = z_{23}^{(-1)}. \tag{3.7}
$$

Как и для $n = -1$, введем переменные $y_i^{(n)}$, аналогичные (3.7) для $n > -1$.

Преобразуем полученную бесконечномерную систему уравнений в группы по шесть уравнений, которые совместно с граничным условием (1.6) позволяют последовательно определить $y_i^{(-1)}, \ldots, y_i^{(n)}, \ldots$, а следовательно, и компоненты тензора напряжения (для известной функции фронта ω). Будем считать, что все значения ω, удовлетворяющие (3.3), (3.4), определены, а функции в дальнейшем однозначными и достаточно гладкими функциями координат, исключая тем самым из рассмотрения случаи наличия каустик.

Подставим одно из этих значений в преобразованную систему уравнений (2.9) для $n = -1$. Из вида матрицы (3.2) следует, что шесть компонент $y_i^{(-1)}$ выражаются только через $r < 3$ функций из $y_1^{(-1)}$, $y_2^{(-1)}$, $y_3^{(-1)}$, где $3 - r$ — ранг углового минора в (3.2). Далее рассмотрим три первых преобразованных уравнения (2.9) для $n = 0$. Имеем систему линейных алгебраических уравнений относительно $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, $y_3^{(0)}$ с неоднородной правой частью, зависящей от заданных коэффициентов уравнений, известного решения ω и $y_i^{(-1)}$. Известно [5], что для такой системы уравнений существует ровно r линейно-независимых преобразований строк, дающих нулевую комбинацию в левой части системы. Это позволяет получить r дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно r неизвестных функций из $y_i^{(-1)}$. Аналогичную процедуру проделаем для остальных решений ω. В результате придем к задаче определения r_1 функций из числа стольких же уравнений (r_1 — общее число определяемых функций).

Ранг углового минора (3.2) может зависеть как от точки пространства x_α, так и от выбора системы координат (направления градиента ω). Воспользовавшись представлением (3.6) и приведя эту матрицу к жордановой форме, можно показать, что если в данной точке для данных направлений ее ранг равен $3 - r$, то кратность скорости G_n в этом случае равна r. Отсюда следует, что для любых координат в каждой точке пространства нахождение $y_i^{(-1)}$ ($i = 1, 2, 3$) сводится к решению системы трех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Общее решение задачи представляется в виде суммы частных решений и должно удовлетворять краевым условиям на поверхности S. Получим эти условия. Разложим изображение правой части (1.6) в ряд

$$\tilde{T}^i = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{T^{i(n)}}{p^{n+1}} \quad (k \geqslant -1). \tag{3.8}$$

Перепишем (1.6), используя формулы (3.5), (3.7),

$$\sigma^{ij}\omega,_j|_S = y^i|_S = G_n^{-1}|_S T^i H(t).$$

Отсюда

$$y^{i(n)}|_S = G_n^{-1}|_S T^{i(n)} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Следовательно, проблема определения $y_i^{(-1)}$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$) свелась к к краевой задаче Коши. Будем предполагать в дальнейшем границу S, коэффициенты уравнений (1.5) и граничные функции T_i в (1.6) обладающими необходимыми свойствами гладкости, обеспечивающими существование и единственность решения этой задачи. Остюда следует, что разложения в формулах (2.7), (3.8) обязаны начинаться с одних и тех же значений n.

После определения $y_i^{(-1)}$ рекуррентным образом определяются $y_i^{(0)}, \ldots$ $\ldots, y_i^{(n)}, \ldots$

4. Физические условия совместности. Связь волновых полей напряжений и перемещений. Пусть изображение волны перемещения задано рядом

$$\tilde{u}^j = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{f^{j(n)}}{p^{n+1}} e^{-p\omega}, \tag{4.1}$$

а изображение волны напряжения имеет вид (2.7). Подставим (4.1), (2.7) в трансформированное уравнение движения (1.1) и, собирая члены при одинаковых степенях p, приравняем их к нулю. Тогда получим

$$\rho f^{j(-1)} = 0; \tag{4.2}$$

$$\rho f^{j(0)} = -z^{ij(-1)}\omega,_i; \tag{4.3}$$

$$\rho f^{j(n+1)} = \nabla_i z^{ij(n-1)} - z^{ij(n)}\,\omega,_i \tag{4.4}$$

для $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Условие (4.2) говорит о том, что порядок минимального разрыва производной от перемещения по времени на единицу ниже минимального порядка разрыва напряжения. Условия (4.3), (4.4) с использованием ряда (2.6) при известном уравнении фронта волны позволяют построить полное поле волны перемещения, если известно поле волны напряжения. Уравнения (4.2) — (4.4) верны для любой сплошной, а не только упругой среды, так как при их выводе не использовался никакой физический закон.

Подставим теперь (4.1), (2.7) в закон Гука, записанный в изображениях, и соберем члены при одинаковых степенях p.

Тогда получим

$$C_k^{ijl}\omega,_l f^{k(-1)} = 0; \tag{4.5}$$

$$z^{ij(-1)} = C_k^{ijl}\omega,_l f^{k(0)}; \tag{4.6}$$

$$z^{ij(n)} = C_k^{ijl}\left(\nabla_l f^{k(n)} - \omega,_l f^{k(n+1)}\right) \tag{4.7}$$

для $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Соотношения (4.3), (4.6) определяют связь минимальных разрывов волн напряжения с минимальными разрывами волн перемещения. Аналогичная связь для скачков высших производных определяется соотношениями (4.4), (4.7)

Соотношения (4.6), (4.7) позволяют находить полные волновые поля напряжений, если задано поле волны перемещения.

Используя обозначения (3.5), соотношения (4.3) можно переписать в виде

$$z^{ij(-1)}\nu_i = -\rho G_n f^{j(0)}.$$

Если же $f^{j(0)} = 0$, то

$$z^{ij(0)}\,\nu_i = -\rho G_n f^{j(1)}. \tag{4.8}$$

Выражение (4.8) совпадает с условием динамической совместности, приведенным в [7] и полученным там иным путем.

5. Условия динамической компактности для волн напряжения. Будем говорить, что система полуограниченная упругая среда — поверхность S — распределение действующих нагрузок удовлетворяет условию динамической компактности, если при действии граничной нагрузки в течение конечного времени t_0 каждая точка среды после прохождения всех волновых фронтов разгрузки находится в состоянии покоя.

Из определения следует, что динамически компактные системы переносят заданное распределение граничной нагрузки таким образом, что локальным по времени возмущениям на границе соответствуют локальные по времени возмущения в каждой точке пространства.

В соответствии с определением компактности вместо общих краевых условий (1.6) поставим условия

$$\sigma^{ij}|_S = A^{ij}(x_\alpha)|_S P^{ij}(t) G\,(t, t_0) \tag{5.1}$$

(суммирование по индексам отсутствует), где

$$G(t, t_0) = H(t) H(t_0 - t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ 0, & t > t_0. \end{cases}$$

В (5.1) шесть компонент A^{ij} выражаются через три компоненты вектора напряжения, градиент к поверхности S и характеристики среды в окрестности этой поверхности (см. три последние строчки матрицы (3.2)). Оказывается, что исследование динамической компактности для произвольных функций P^{ij} сводится к проверке этого условия для

$$P^{ij}(t) = \delta(t). \tag{5.2}$$

Л е м м а. Система для напряжений (1.5), (5.1), (1.7), (1.8) динамически компактна тогда и только тогда, если граничному возмущению (5.1) при условии (5.2) соответствует решение

$$\sigma^{ij} = \sum_{\gamma=1}^{3} A_\gamma^{ij}(x_\alpha)\,\delta(\Omega_\gamma), \tag{5.3}$$

где $\Omega_\gamma = t - \omega_\gamma(x_\alpha) = 0$ есть уравнение соответствующего фронта.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже отмечалось в п. 3, краевому условию (5.1) с учетом (5.2) в любом случае должно соответствовать решение

$$\sigma^{ij} = \sum_{\gamma=1}^{3} \left\{ A_\gamma^{ij}(x_\alpha)\,\delta(\Omega_\gamma) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_\gamma^{ij(n)}}{n!} \Omega_\gamma^n H(\Omega_\gamma) \right\} =$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{3} \{A_\gamma^{ij}(x_\alpha)\,\delta(\Omega_\gamma) + B_\gamma^{ij}(x_\alpha, \Omega_\gamma)\,H(\Omega_\gamma)\}. \tag{5.4}$$

Если рассматривать решение (5.4) в качестве фундаментального, в соответствии с принципом суперпозиции [6] граничному возмущению (5.1) должно соответствовать решение

$$\sigma^{ij} = \sum_{\gamma=1}^{3} \left\{ A_\gamma^{ij} P^{ij}(\Omega_\gamma)\,G(\Omega_\gamma, t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} P^{ij}(\tau)\,G(\tau, t_0) \times \right.$$

$$\left. \times B_\gamma^{ij}(x_\alpha, \Omega_\gamma - \tau)\,H(\Omega_\gamma - \tau)\,d\tau \right\} = \sum_{\gamma=1}^{3} \left\{ A^{ij}(x_\alpha)\,P^{ij}(\Omega_\gamma)\,G(\Omega_\gamma, t_0) + \right.$$

$$\left. + \left[\int_0^{\min(\Omega_\gamma, t_0)} P^{ij}(\tau)\,B_\gamma^{ij}(x_\alpha, \Omega_\gamma - \tau)\,d\tau \right] H(\Omega_\gamma) \right\}$$

(по i, j не суммировать).

Зафиксируем произвольную внутреннюю точку x_{α_0} и рассмотрим в ней решение. Имеем

$$\sigma^{ij}|_{x_{\alpha_0}} = \begin{cases} 0 \text{ при } \Omega_{\max} < 0, \\ I^{ij}(t) \text{ при } 0 \leqslant \Omega_{\max},\ \Omega_{\min} \leqslant t_0, \\ \sum\limits_{\gamma=1}^{3} \int\limits_0^{t_0} P^{ij}(\tau)\,B_\gamma^{ij}(x_{\alpha_0}\Omega_\gamma - \tau) \text{ при } \Omega_{\min} > t_0 \end{cases} \tag{5.5}$$

(суммирование по i, j отсутствует), I^{ij}—некоторые, в общем случае отличные от нуля функции времени. Если условия леммы выполнены, тогда из (5.4) имеем $\sum_{\gamma=1}^{3} B_\gamma^{ij} \equiv 0$ и из (5.5) следует (5.3), т. е. динамическая компактность. Если же выполняется требование динамической компактности, то необходимо, чтобы последнее выражение в (5.5) для произвольных P^{ij} обращалось в нуль. Но это эквивалентно $\sum_{\gamma=1}^{3} B_\gamma^{ij} = 0$.

Теорема. Необходимым и достаточным условием динамической компактности для системы (1.5) — (1.8) будет выполнение следующей системы равенств на всех фронтах одновременно:

$$D_{lm}(z^{ij}) = M_{lm}(z^{ij}) = L_{lm}(z^{ij}) = 0, \tag{5.6}$$

где операторы D_{lm}, M_{lm}, L_{lm} описаны в (2.10) — (2.12).

Доказательство. Воспользуемся доказанной леммой. Пусть действует нагрузка (5.1) с условием (5.2). В пространстве изображений это соответствует тому, что разложение изображения (5.1) содержит всего один член ряда (2.7). Будем решать рекуррентную систему (2.9). После определения $z^{ij(-1)}$ нахождение $z^{ij(n)}$ ($n = 0, 1, \ldots$) сводится благодаря условиям (5.6) к решению задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка с нулевыми начальными данными на S, решение которой нулевое. Таким образом, условие леммы выполнено. Эта теорема позволяет в принципе выделить все классы неоднородностей при заданной поверхности S, когда для любых распределений граничных нагрузок выполняется условие динамической компактности. Для этого достаточно из (5.6) исключить функции z^{ij}.

Отметим физически неочевидный результат о том, что из динамической компактности волны напряжения не обязательно следует компактность волны перемещения. Ситуация, когда обе волны являются динамически компактными, скорее, является исключительной. Из соотношений (4.2) — (4.4) следует, что для динамически компактной по напряжениям системы граничному возмущению типа (5.2) соответствует поле перемещения, линейно-возрастающее во времени. Поэтому физически очевидно, что для случая одномерных задач с цилиндрической и сферической симметрией, когда на границе действуют нормальные напряжения, динамической компактности для волн напряжений быть не может. Это можно проверить и аналитически.

6. Условия динамической компактности для одномерной волны напряжения вращения $\sigma_{r\varphi}$ в случае цилиндрической полости в цилиндрически ортотропном неоднородном пространстве. Рассмотрим систему цилиндрическая полость в цилиндрически ортотропном неоднородном пространстве — равномерно распределенная по поверхности разрывная по времени граничная нагрузка $\sigma_{r\varphi}$. Оси коориднат $(x_1, x_2, x_3) \to (r, \varphi, z)$ совпадают с осями ортотропии. Уравнение поверхности цилиндрической полости $r = r_0 = \mathrm{const}$. Найдем для этой системы условия динамической компактности.

Для цилиндрической системы координат [1]

$$g_{11} = 1,\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = 1,\ \Gamma_{22}^1 = -r,\ \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = r^{-1},$$

а остальные символы Кристоффеля равны нулю, напряжение $\sigma_{r\varphi}$ — физическая проекция тензора напряжения σ^{12}— определяется по формуле

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma^{12}\sqrt{g_{11}g_{22}} = \sigma^{12}r. \tag{6.1}$$

Условия динамической компактности (5.6) для данной системы вырождятся в три уравнения

(6.2) $$\left(C_{1212}\omega_{,1}^{2}-\rho r^{2}\right)z^{12}=0;$$

(6.3) $$\frac{3}{r}+2\frac{z_{,1}^{12}}{z^{12}}+\frac{\zeta_{,1}}{\zeta}=0\quad(\zeta=\rho^{-1}\omega_{,1});$$

(6.4) $$\left[\rho^{-1}\left(z_{,1}^{12}+3r^{-1}z^{12}\right)\right]_{,1}=0,$$

остальные уравнения (5.6) удовлетворяются тождественно. Здесь под z^{12} можно понимать разрыв любого порядка σ^{12}.

Из (6.2) следует

$$\omega_{,1}^{2}=\rho^{2}\theta^{-2}\left(\theta=\sqrt{\rho C_{1212}^{*}}\right),$$

где C_{1212}^{*} —физическая проекция тензора жесткостей.

Из (6.3), (6.1) получим закон изменения амплитуды волны напряжения на фронте

$$\sigma_{r\varphi}=\sigma_{0}(r^{-1}\theta)^{1/2},$$

где $\sigma_0=\mathrm{const}$ и определяется из величины напряжения на границе и граничных характеристик среды. Из (6.4) получим дифференциальное соотношение первого порядка, связывающее функции плотности и жесткости,

(6.5) $$\theta^{1/2}=C_{1}r^{3/2}\rho\left[3r^{-1}+(\ln\theta)_{,1}\right]^{-1},$$

где C_1 — произвольная постоянная величина.

В частном случае $\rho C_{1212}^{*}=C_{2}=\mathrm{const}$ получим из (6.5)

$$\rho=C_{3}r^{-1/2};\quad C_{1212}^{*}=C_{2}C_{3}^{-1}r^{1/2},$$

где C_3 — произвольная положительная постоянная.

Поступила 23 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Снеддон И. Н., Берри Д. С.** Классическая теория упругости. М., Физматгиз, 1961.
2. **Новацкий В.** Теория упругости. М., «Мир», 1975.
3. **Бабич В. М.** Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды.— В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 5. ЛГУ, 1961.
4. **Reddy.** Stress waves in nonhomogeneous rods.— «J. of the Acoust. Soc. of Amer.», 1969, vol. 75.
5. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры. М., «Наука», 1965.
6. **Петровский И. Г.** Лекции об уравнениях в частных производных. М., Физматгиз, 1961.
7. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
8. **Федоров Ф. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.