

УДК 662.612:32

СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН В ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЕ С ДВУМЯ ДАВЛЕНИЯМИ

А. В. Фёдоров

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, 630090 Новосибирск
fedorov@itam.nsc.ru

Рассматривается ударно-волновое движение смеси газа и мелких твердых частиц с учетом различия скоростей и при наличии собственного давления фазы частиц, которое описывается уравнениями типа Андерсона и др. Описаны различные виды уравнения состояния для фазы частиц. Даны графические иллюстрации уравнения, определяющего составной тип этой модели в пренебрежении давлением фазы частиц. Показано, что при некоторых предположениях полная модель приводится к системе уравнений гиперболического типа. Для последней определены типы ударных волн, реализующихся в данной смеси. Высказанные утверждения проиллюстрированы численными расчетами.

Ключевые слова: смесь газа и твердых частиц, давление фазы частиц, структура ударной волны, замороженные и дисперсионные ударные волны.

DOI 10.15372/FGV20150609

ВВЕДЕНИЕ

Проблема физико-математического описания волновых процессов в смесях газов и мелких частиц/капель является актуальной. При разработке многих технологических процессов для различных отраслей промышленности определяющую роль играют законы механики гетерогенных сред, в том числе при изучении течения реагентов через сыпучий катализатор с учетом и без учета химических реакций, высокоскоростных концентрированных суспензий в каналах различных установок и т. д. Моделирование подъема мелких частиц из неустойчивых отложений под воздействием взрывных и детонационных волн также требует приложения методов механики гетерогенных сред. Здесь для определения типа течения смесей необходимо принимать во внимание взаимопроникающее движение фаз и компонентов. Значительный интерес в плане ослабления воздействия динамических явлений на окружающую среду представляет проблема взаимодействия слоев пористого вещества, например ячеисто-пористой структуры, слоев частиц насыпной плотности с сильными разрывами. Поэтому столь актуальны вопросы выяснения возможных конфигураций ударных волн. Действительно, исследователям необходима информация о том, какие виды сильных

разрывов могут реализоваться в гетерогенной среде и при каких условиях они существуют.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основные уравнения

Итак, рассмотрим смесь газа и твердых частиц, заполняющих одномерный континуум. Математическая модель, описывающая движение смеси, представляет собой модель взаимопроникающего течения двух взаимодействующих континуумов, параметры каждого из которых (такие, как скорость, плотность, давление) осреднены по объему. Первым континуумом является несущий газ, характеризующийся собственной скоростью, давлением и объемной концентрацией. Вторым континуумом (фаза частиц) имеет свое давление, возникающее вследствие обмена импульсами между частицами в результате их хаотического движения в газе, свою скорость и объемную концентрацию, отличные от параметров газа. В [1] давление фазы частиц измерялось как импульс, передаваемый частицами мембране датчика, осредненный по времени столкновения; предложено некоторое уравнение состояния.

Движение рассматриваемой двухфазной среды в изотермическом случае с учетом собственного давления фазы частиц описывается

уравнениями сохранения массы и импульса для каждой фазы и дополняется уравнениями состояния (модель Андерсена):

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1^2 + m_1 p_1)}{\partial x} = p_1 \frac{\partial m_1}{\partial x} - f_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2^2 + m_2 p_1)}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial x} = p_1 \frac{\partial m_2}{\partial x} - f_2.$$

Уравнения состояния в изотермическом случае возьмем для простоты в линейной форме для обеих фаз, как частный случай, предложенный в [2] (см. также [3–5]):

$$p_1 = \frac{a_1^2 \rho_1}{m_2}, \quad p_2 = a_2^2 \rho_2, \quad \rho_{22} \equiv r_1 = \text{const}, \quad (2)$$

где $\rho_i = \rho_{ii} m_i$, ρ_{ii} , m_i , u_i , p_i , a_i — средняя и истинная плотность, объемная концентрация, скорость, давление и скорость звука i -й фазы ($i = 1, 2$); индексом 1 обозначены параметры газа, 2 — частиц; f_1 — сила, действующая на частицы со стороны газа, $f_2 = -f_1$ — сила, действующая на газ со стороны частиц. Далее будем считать $a_1 < a_2$, обратное неравенство рассматривается ниже. Систему (1), (2) замкнем основным равенством механики гетерогенных сред

$$m_1 + m_2 = 1. \quad (3)$$

Сила взаимодействия между фазами

Силовое взаимодействие фаз представим в виде

$$f_1 = \frac{3}{8} \frac{m_2 \rho_{11}}{r} C_D (u_1 - u_2) |u_1 - u_2|, \quad (4)$$

где C_D — коэффициент сопротивления сферической частицы. При стоксовом режиме обтекания $C_D = 24/\text{Re}$, где $\text{Re} = 2r|u_1 - u_2|\rho_{11}/\mu$ — относительное число Рейнольдса, μ — вязкость газа, r — радиус частицы. Выражение (4) при стоксовом режиме обтекания выглядит следующим образом: $f_1 = (u_1 - u_2)\rho_2/\tau_{st}$, где $\tau_{st} = (2/9)\rho_{22}r^2/\mu$ — стоксово время релаксации скоростей. Отклонение от стоксова закона сопротивления учитывается стандартно, где поправочный коэффициент f_D отличен от единицы вследствие разреженности газа, особенно для

частиц малого размера, сжимаемости и инерционности. Эффект разреженности оценивается по формуле

$$f_D = \left\{ 1 + \frac{M}{\text{Re}} \left[3.82 + 1.28 \exp \left(-1.25 \frac{\text{Re}}{M} \right) \right] \right\}^{-1}.$$

Здесь и далее в число Маха входит скорость относительного движения фаз: $M = |u_1 - u_2|/a_1$. Поправка на инерционность аппроксимируется формулой Горобина — Говина: $f_D = 1 + 0.15\text{Re}^{0.687}$. Коэффициент

$$f_D = \left[1 + \exp \left(-\frac{0.427}{M^{4.63}} - \frac{3.0}{\text{Re}^{0.88}} \right) \right]$$

учитывает сжимаемость. Таким образом, при вводе вышеперечисленных поправок, коэффициент сопротивления сферы имеет следующий вид [6]:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0.15\text{Re}^{0.687}) \times \left[1 + \exp \left(-\frac{0.427}{M^{4.63}} - \frac{3.0}{\text{Re}^{0.88}} \right) \right] / \left\{ 1 + \frac{M}{\text{Re}} \left[3.82 + 1.28 \exp \left(-1.25 \frac{\text{Re}}{M} \right) \right] \right\}. \quad (5)$$

Уравнение состояния

Остановимся на проблеме построения уравнения состояния для фазы частиц. Экспериментальному исследованию зависимости давления фазы частиц от плотности посвящена работа [1], в ней также дан анализ некоторых аппроксимаций этой зависимости. Эксперименты проводили при различных параметрах смеси, таких как характерный размер частиц твердой фазы, отношение осредненных плотностей газа и частиц, скорость несущего потока, число Рейнольдса. В [7] предложено уравнение состояния для фазы частиц на основе элементарных соображений молекулярно-кинетической теории: $P_s = \frac{\rho_{22} C m_2}{1 - (m_2/m_{2p})^{1/3}}$. Эти соображения грубы, но отражают главные особенности описываемых явлений, такие как линейное поведение давления при малых

концентрациях, значительное возрастание давления вблизи концентрации плотной упаковки частиц m_{2p} . В работе [2] решалась задача о движении смеси газа (жидкости) и частиц в поле тяжести. Было рассмотрено два вида уравнений состояния. В частности, предложено два вида аппроксимации экспериментальных зависимостей давления для фазы частиц. Одна из них: $P_2 = Cm^2 \exp \frac{rm_2}{m_{2p} - m_2}$, где m_{2p} — объемная концентрация фазы частиц, соответствующая насыпной плотности. Константы C и r взяты из соображений наилучшей аппроксимации. Другой вид зависимости: $P_2 = C \frac{m_2^{k_1}}{(m_{2p} - m_2)^{k_2}}$. Для степеней k_1 и k_2 предложено два варианта: $k_1 = 1, k_2 = 2$ и $k_1 = 1, k_2 = 0$.

О типе одного предельного случая уравнений МГС

Итак, после определения всех входящих в систему исследования параметров следует определить ее тип, что является полезным для постановки корректных задач. Эта проблема привлекала в свое время активное внимание и решалась различными учеными, в том числе Л. В. Овсянниковым, А. Н. Крайко, Р. И. Нигматулиным, Г. Г. Елениным, В. С. Посвянским, Н. В. Stewart, В. Wendroff и др., для тех или иных систем уравнений механики гетерогенных сред. Интерес к ней не утихает до сих пор [8, 9]. Проведем исследование в форме, близкой к изложенной в [10]. Рассмотрим для простоты случай одномерного нестационарного течения смеси с одним давлением. Уравнение для определения характеристик данного предельного случая системы (1), (2) имеет вид

$$(u_1 - \lambda)^2(u_2 - \lambda)^2 - m_2 p_{\rho_2}(u_1 - \lambda)^2 - m_1 p_{\rho_1}(u_2 - \lambda)^2 = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$m_1 p_{\rho_1} = a^2, \quad m_2 p_{\rho_1} = \frac{m_2}{m_1} a^2, \\ m_2 p_{\rho_2} = a^2 \frac{\rho_{11}}{r} \frac{m_2}{m_1}, \quad a = a_1, \\ m_1 p_{\rho_2} = a^2 \frac{\rho_{11}}{r}, \quad \theta = a^2 \frac{\rho_{11}}{r} \frac{m_2}{m_1}.$$

Тогда полином (6) принимает вид

$$(u_1 - \lambda)^2(u_2 - \lambda)^2 - \theta a^2(u_1 - \lambda)^2 - a^2(u_2 - \lambda)^2 = 0.$$

Введем величины v, w , такие что $\lambda = v + \frac{u_1 + u_2}{2}$, $w = \frac{u_2 - u_1}{2}$. Отнесем все величины в последнем уравнении к скорости звука и оставим прежние обозначения для безразмерных величин. Полученное уравнение можно переписать в виде

$$\Phi(v, w, \theta) = \frac{\theta}{(w - v)^2} + \frac{1}{(w + v)^2} = 1.$$

Оно и определяет количество действительных и мнимых характеристик рассматриваемой системы нелинейных уравнений механики гетерогенных сред. Вид графика функции $\Phi(v, w, \theta)$ в плоскости (Φ, v) показывает, что корни v определяются в зависимости от того, выше или ниже единицы расположен ее минимум. Для этого найдем экстремумы данной функции. Для нас представляет интерес случай при $v = v_* = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} w$, $\theta = \varepsilon^3$, который дает корень, имеющий физический смысл и определяющий минимальное значение исследуемой функции.

Окончательно минимум функции получаем в виде

$$\Phi(v_*, w, \theta) = \frac{(1 + \varepsilon)^2(1 + \varepsilon)}{4w^2} = \frac{(1 + \varepsilon)^3 4}{4(u_1 - u_2)^2} = \frac{(1 + \varepsilon)^3}{(u_1 - u_2)^2}.$$

Это позволяет сформулировать

Утверждение 1. Если $\frac{(1 + \varepsilon)^3}{(u_1 - u_2)^2} \leq 1$,

то существует четыре различных действительных корня. В противном случае имеем либо два действительных и два кратных, либо два действительных и два мнимых.

Можно дать простую физическую интерпретацию этому факту, если переписать данное неравенство в виде $M_{12}^2 \geq M_*^2 = (1 + \varepsilon)^3$. В частности, если квадрат относительного числа Маха больше, чем правая часть данного неравенства (она незначительно превышает единицу, т. е. течение газа относительно частиц сверхзвуковое), то характеристики действительны (гиперболические уравнения модели механики гетерогенных сред, при этом два

корня обязательно действительны, а два могут быть действительны и кратны) (см. также [11]). В противном случае течение имеет две мнимые и две действительные характеристики (составной тип уравнений). То есть, если $M_{12}^2 < M_*^2$, то течение либо дозвуковое, либо слабо сверхзвуковое, а система (1) является системой составного типа.

Приведем пример эскиза функции $\Phi(v, w)$. Пусть $m_2 = 0.0001$, тогда $\varepsilon \approx 0.005$, а критическое число Маха M_* приближенно равно 1.0015. Примем далее $w = 1$, а $\theta = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$. Как видно, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\Phi(v_*, w, \theta) \rightarrow \frac{1}{4w^2}, \quad v_* \rightarrow 1 - 2\varepsilon.$$

Это означает, что при выравнивании скоростей максимум данной функции может стать больше единицы, т. е. система теряет, вообще говоря, свойство эволюционности. Каковы же корни данного уравнения в общем случае, видно из рис. 1.

При характерных значениях объемной концентрации частиц $m_2 = 10^{-4}$, плотности газа порядка 1 кг/м^3 , плотности частиц порядка 1000 кг/м^3 имеем $\theta \sim 10^{-2}$. Как видно, при реальных значениях этой величины минимум функции $\Phi(v, w, \theta)$ меньше единицы, т. е. существует четыре корня у уравнения, определяющего тип системы. При этом уменьшение концентрации частиц приводит к приближению величины v к $w = (u_2 - u_1)/2 = 1$. Это характерно для неравновесного течения газозвеси. При $w = (u_2 - u_1)/2 \rightarrow 0$ минимум

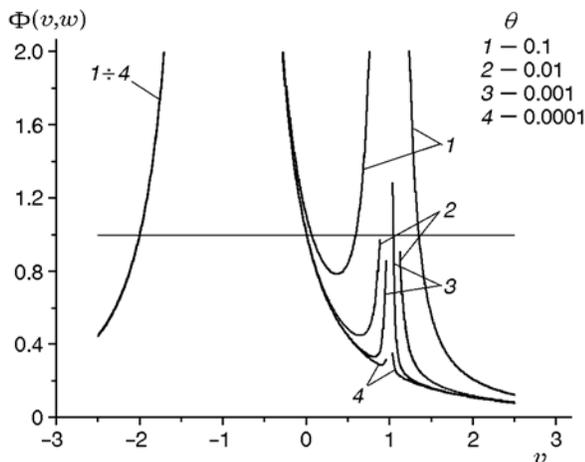


Рис. 1. Вид функции $\Phi(v, w, \theta)$ при изменении θ и при $w = 1$

Характерные величины, определяющие тип системы механики гетерогенных сред при $w = (u_2 - u_1)/2 = 1$ и различных значениях θ

θ	ε	v_*	Φ
0.1	0.464	0.366	0.785
0.01	0.215	0.645	0.449
0.001	0.1	0.818	0.333
0.0001	0.046	0.911	0.286

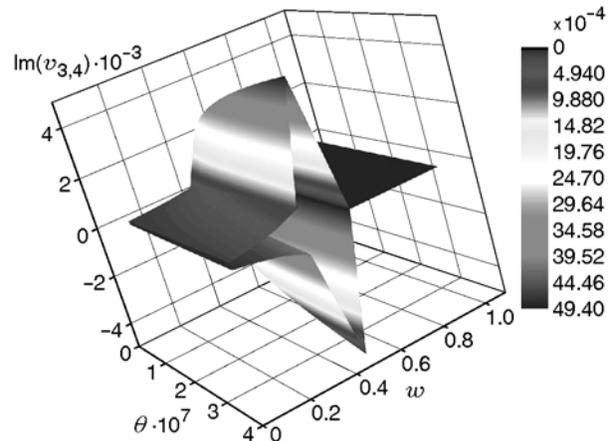


Рис. 2. Изображение комплексных сопряженных корней определяющего уравнения в плоскости (θ, w)

$\Phi(v, w, \theta)$ неограниченно возрастает, и тем самым при приближении к равновесию система имеет мнимые характеристики. Сказанное иллюстрирует таблица, где приведены характерные параметры определяющего уравнения.

В качестве графической иллюстрации на рис. 2 представлены мнимые части комплексных сопряженных корней $v_{3,4}$ в области определения на плоскости (θ, w) . Видно, что при $M_{12}^2 = M_*^2$ происходит вырождение мнимой части, она становится равной нулю и в результате получаем два равных действительных корня в добавление к имеющимся двум действительным.

Рассмотрим предельный случай течения с большой плотностью конденсированной фазы. Нетрудно показать, что справедливо

Утверждение 2. Пусть истинная плотность частиц велика: $r_1 = \rho_{22} > N$, где N — достаточно большое число. Тогда $m_2 p \rho_2 \rightarrow 0$, поскольку

$$m_2 p \rho_2 = \frac{m_2 \rho_{11}}{m_1 \rho_{22}} a^2 \equiv \theta a^2, \quad m_1 p \rho_1 = a^2.$$

В этом случае уравнение (6) имеет действительные решения в виде

$$\lambda_{1,2} = u_2, \quad \lambda_{3,4} = u_1 \pm a.$$

Первые две характеристики представляют собой траектории континуума частиц, а две последние соответствуют газовой фазе и показывают, что, как и в чистом газе, малые возмущения в смеси распространяются вдоль характеристик. Итак, в пределе бесконечно большой истинной плотности второй фазы математическая модель механики гетерогенных сред является гиперболической.

Задача о структуре бегущей волны. Нормальный вид системы

На основе математической модели смеси с двумя давлениями рассмотрим задачу о структуре бегущей ударной волны (УВ) в приближении умеренной объемной концентрации фазы частиц, когда в уравнении сохранения импульса второй фазы можно пренебречь влиянием градиента давления газа. В этом случае уравнения (1) в системе координат, связанной с фронтом УВ, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_i u_i &= C_i, \\ C_1 \dot{u}_1 + \dot{p}_1 &= -f_1, \\ C_2 \dot{u}_2 + \dot{p}_2 &= f_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Разрешая систему (7) относительно производных, можно свести ее к нормальному виду:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= \frac{-u_1 f_1}{\rho_1 (u_1^2 - a_1^2)}, \\ \frac{du_2}{dx} &= \frac{u_2 f_1}{\rho_2 (u_2^2 - a_2^2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Как видно, она обладает стационарными точками. Когда скорости фаз равны между собой, сила взаимодействия равна нулю. Кроме того, в точках, где скорости фаз равны соответственно скоростям звука в газе и в частицах, имеет место опрокидывание решения. То есть в случае, когда ускорения фаз обращаются в бесконечность, возникает течение с обострением. Все это предопределяет сложное поведение решения краевых задач для такой простой системы уравнений, как (8) [12].

Формулирование краевой задачи. Система уравнений (8) должна удовлетворять следующим граничным условиям стационарности для вектора решения $\Phi(u_1, u_2, \rho_1, \rho_2)$:

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi_0, \quad \dot{\Phi} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty), \\ \Phi &\rightarrow \Phi_k, \quad \dot{\Phi} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad (9)$$

Это соответствует тому, что перед фронтом УВ и далеко за ним смесь находится в равновесии, когда скорости компонентов равны. Отметим, что точкой обозначено дифференцирование по автомодельной переменной. Тем самым задача о структуре УВ в газозвеси с учетом собственного давления частиц свелась к решению краевой задачи (8), (9) в бесконечном интервале. Наша задача — определить возможные структуры этого перехода. Предварительно определим некоторые характерные значения параметров течения смеси.

Скорость звука в смеси. Скорость звука для равновесной смеси, когда равны между собой скорости фаз, определяется как $a_e^2 = \frac{dP}{d\rho} = a_1^2 \xi_1 + a_2^2 \xi_2$, где $P = p_1 + p_2 = a_e^2 \rho$ — давление смеси в целом, $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — ее средняя плотность, $\xi_i = \frac{C_i}{C_1 + C_2} = \text{const}$ — относительная массовая концентрация фазы.

Замороженные и равновесные состояния в смеси. Рассмотрим некоторые характерные типы течений фаз, которые наступают при изменении времени релаксации скоростей и концентраций компонентов двухфазной смеси.

1. Полностью замороженное течение ($u_1 \neq u_2$, $p_1 \neq p_2$). В этом течении можно определить a_i — скорость звука в i -м компоненте и $\tilde{u}_i = a_i^2/u_0$ — скорость за замороженной УВ в соответствующей фазе.

2. Равновесное по скоростям течение смеси ($u_1 = u_2$). Оно реализуется, если время выравнивания скоростей много меньше, чем характерное время распространения волновых процессов в фазах смеси.

Закон сохранения импульса для смеси в целом. Рассмотрим движение смеси в пространстве скоростей фаз. Сложив уравнения сохранения импульса фаз в (7), получим закон сохранения импульса для смеси в целом, который имеет следующий вид [3, 12]:

$$\Phi(u_1, u_2) = \xi_1 \frac{(u_1 - u_0)(u_1 - \tilde{u}_1)}{u_1} +$$

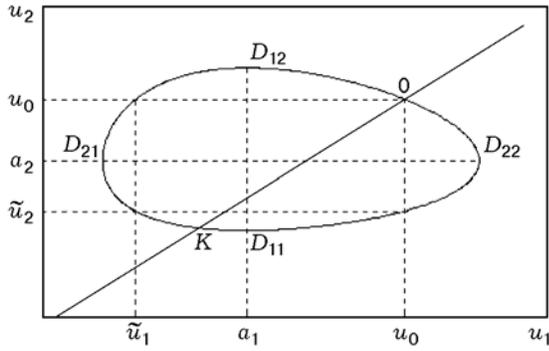


Рис. 3. Графическое представление закона сохранения импульса для смеси в целом в плоскости (u_1, u_2) : отмечены равновесные значения $0, K$, лежащие на линии равных скоростей, и точки разворота

$$+ \xi_2 \frac{(u_2 - u_0)(u_2 - \tilde{u}_2)}{u_2} = 0. \quad (10)$$

График данной зависимости представляет собой замкнутую кривую в плоскости (u_1, u_2) (рис. 3).

Найдем равновесные значения скоростей в смеси за фронтом УВ. Положим $u_1 = u_2 = u$ в (10) и получим квадратное уравнение: $u^2 - u(u_0 + a_e^2/u_0) + a_e^2 = 0$. Отсюда ясно, что равновесных состояний всего два, начальное и конечное — u_0 и u_k , при этом $u_k = a_e^2/u_0$.

Фазовая кривая $\Phi(u_1, u_2) = 0$ имеет четыре точки разворота ($D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$), в которых скорость одной из фаз равняется скорости звука в данной фазе ($u_1 = a_1, u_2 = a_2$), а одна из производных \dot{u}_1 и \dot{u}_2 при этом обращается в бесконечность.

Определим возможные состояния за фронтом замороженной УВ. Из (10) видно, что при $u_1 = u_0$ имеем $u_2 = u_0$ или $u_2 = \tilde{u}_2$, а при $u_2 = u_0$ имеем $u_1 = u_0$ или $u_1 = \tilde{u}_1$. Таким образом, за фронтом замороженной УВ могут реализоваться три состояния смеси: $(u_0, \tilde{u}_2), (\tilde{u}_1, u_0), (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, т. е. существует множественность состояний. Наша задача выбрать из них устойчивые. Для этой цели необходимо провести качественный анализ сформулированной краевой задачи для системы (8), (9).

Зависимость типа течения от начальных параметров смеси. Оказалось, что в зависимости от начальных параметров смеси в течении могут реализовываться различные типы УВ: полностью дисперсионные, замороженно-

дисперсионные, а также замороженные с одной и двухфронтной структурой и др. При этом могут быть разрывы параметров в первой фазе и непрерывные течения во второй и наоборот, причем как в голове волны, так и в ее хвосте.

Для поиска возможных типов УВ использовался метод исследования, предложенный в [3, 10], основанный на рассмотрении неравновесных процессов на фазовой кривой $\Phi(u_1, u_2) = 0$ в плоскости скоростей фаз смеси (u_1, u_2) .

Для анализа устойчивости решений определим знаки собственных чисел уравнений для нахождения u_1, u_2 в точках равновесия $u_1 = u_2 = u$ ($\lambda_i = \frac{d\dot{u}_i}{du_i}$). Для этого из уравнения сохранения импульса найдем производную

$$\frac{du_2}{du_1} = - \frac{\xi_1 (u_1^2 - a_1^2) u_2^2}{\xi_2 (u_2^2 - a_2^2) u_1^2},$$

а потом и соответствующие собственные числа

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = - \frac{1}{\tau_{st} \xi_1} \frac{u(u^2 - a_e^2)}{(u^2 - a_1^2)(u^2 - a_2^2)}. \quad (11)$$

Заметим, что знак собственного числа зависит от того, как равновесная скорость смеси в начальном или конечном состоянии соотносится со скоростями звука в обеих фазах и с равновесной скоростью звука. Это зависит также от того, как конечная равновесная скорость смеси u_k зависит от ее начальных параметров ξ_1 и u_0 . Учитывая, что $u_k = a_e^2/u_0 = (a_1^2 \xi_1 + a_2^2(1 - \xi_1))/u_0$ и налагая соответствующие условия на u_k , получим следующие оценки скорости в конечной равновесной точке в случае, когда начальная скорость смеси больше минимальной скорости звука фаз:

- 1) если $\xi_1 > \xi_{**}$, то $u_k < a_1 < a_2$;
 $u_k = a_1$ при $\xi_1 = \xi_{**}$;
- 2) если $\tilde{\xi} < \xi_1 < \xi_{**}$, то $a_1 < u_k < a_{ee} < a_2$;
- 3) если $\tilde{\xi} < \xi_1 < \xi_*$, то $a_1 < a_{ee} < u_k < a_2$;
 $u_k = a_2$ при $\xi_1 = \xi_*$;
- 4) если $\xi_1 < \xi_*$, то $u_k > a_2 > a_{ee} > a_1$.

Здесь

$$\xi_{**} = \frac{a_2^2 - a_1 u_0}{a_2^2 - a_1^2}, \quad \tilde{\xi} = \frac{a_2^2 - u_0^2}{a_2^2 - a_1^2}, \quad \xi_* = \frac{a_2^2 - a_2 u_0}{a_2^2 - a_1^2}.$$

При фиксированных скоростях звука в фазах критические массовые концентрации $\tilde{\xi}, \xi_*$,

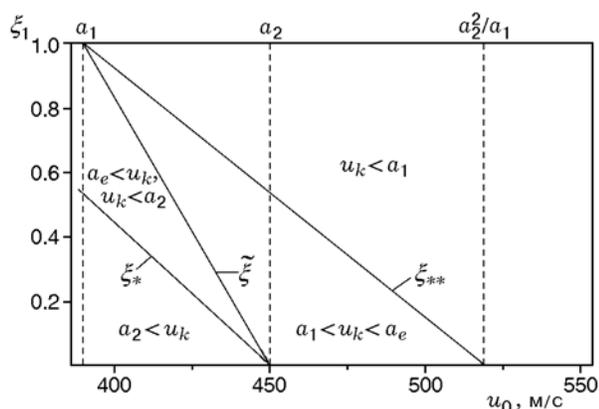


Рис. 4. Оценка конечной скорости смеси в зависимости от ее начальной скорости и относительной массовой концентрации газового компонента

ξ_{**} являются функциями u_0 и разбивают плоскость (u_0, ξ_1) на несколько областей (рис. 4, 5): $u_k < a_1$; $a_1 < u_k < a_e$; $a_e < u_k < a_2$; $a_2 < u_k$.

Заметим, что $u_k u_0 = a_e^2$, поэтому если $u_k < a_e$, то $u_0 > a_e$, и наоборот. Отсюда следует, что при начальных параметрах, принадлежащих областям I_3, I_4, III_3, III_4 , равновесное состояние при $x \rightarrow +\infty$ не реализуется.

Отметим также симметрию системы (7) относительно замены индексов $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$. Это сигнализирует о том, что случай обратного неравенства для скоростей звука ($a_2 < a_1$) может быть рассмотрен аналогично. На основе зависимости собственных чисел от равновесных параметров течения (11), а также разбиения области начальных параметров (см. рис. 4, 5) можно показать, что $\lambda_0 < 0$ при $(u_0, \xi_1) \in I_1, I_2, III_1, III_2, IV$ и $\lambda_0 > 0$ при $(u_0, \xi_1) \in II_1, II_2$. Аналогичное утверждение доказывается и для конечного состояния.

При построении структуры УВ воспользуемся следующими простыми соображениями. При $\lambda_0 < 0$ решение экспоненциально растет на $x = -\infty$, а при $\lambda_k > 0$ — на $x = +\infty$, что не имеет физической интерпретации. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо использовать разрывные решения. При $\lambda_0 < 0$ вводится разрыв исходя из условий на замороженной УВ, а при $\lambda_k > 0$, когда скорость одной из фаз достигает значения конечной равновесной скорости, вводится разрыв в другой фазе, приводящий смесь в равновесное состояние. Некоторые соображения о получении УВ приведем ниже при анализе их

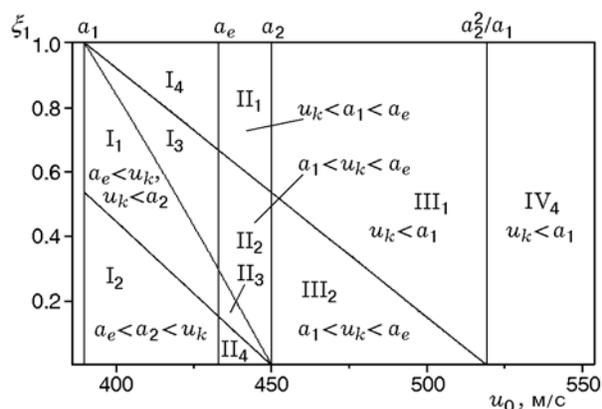


Рис. 5. Определение характерных областей при оценке конечной скорости смеси

типов. Итак, рассмотрим несколько примеров построения решения поставленной задачи о структуре УВ в газозвеси с собственным давлением частиц. Отметим, что решение сформулированной краевой задачи было получено с помощью программы RADAU5 (см. <http://www.unige.ch/~hairet/prog/stiff/radau5.f>), использующей неявный метод Рунге — Кутты пятого порядка с выбором шага.

ОБСУЖДЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Высказанные положения о решении задачи (8), (9) иллюстрируют графики скоростей компонентов в соответствующих областях. На рис. 6–10 справа приведены основные точки в плоскости скоростей фаз (u_1, u_2) . Параметры смеси, при которых проводился расчет профилей УВ, таковы: $a_1 = 390$ м/с, $a_2 = 450$ м/с, $\rho_{22} = 2700$ кг/м³, $\rho_{11} = 1.2$ кг/м³, $d = 10^{-6}$ м.

Область II₁. Дисперсионно-замороженная УВ

В случае, когда начальная скорость смеси лежит в интервале между значениями скоростей звука в газе и в фазе частиц $a_1 < u_0 < a_2$, а конечное состояние дозвуковое в обеих фазах, реализуется дисперсионно-замороженная УВ (непрерывное течение в голове волны для первой фазы, замороженный переход в хвосте для второй, см. рис. 6). На фазовой плоскости (u_1, u_2) процесс идет по нижней ветви. В точке 0 решение выходит из равновесия непрерывным образом в обеих фазах и приходит в точку K_1 , в которой скорость в газе равна конечной

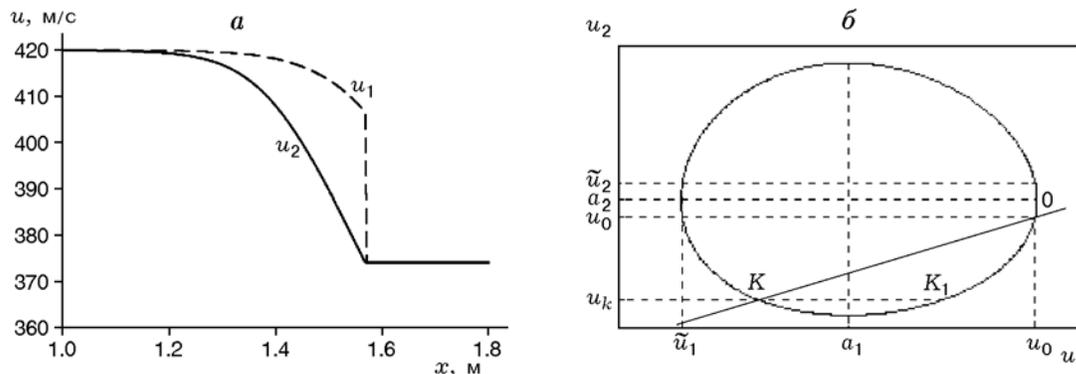


Рис. 6. Профиль скоростей стационарной дисперсионно-замороженной УВ (а) и ее образ в фазовом пространстве (б) при начальных параметрах $\xi_1 = 0.9, u_0 = 420$:

начальное состояние в УВ находится слева

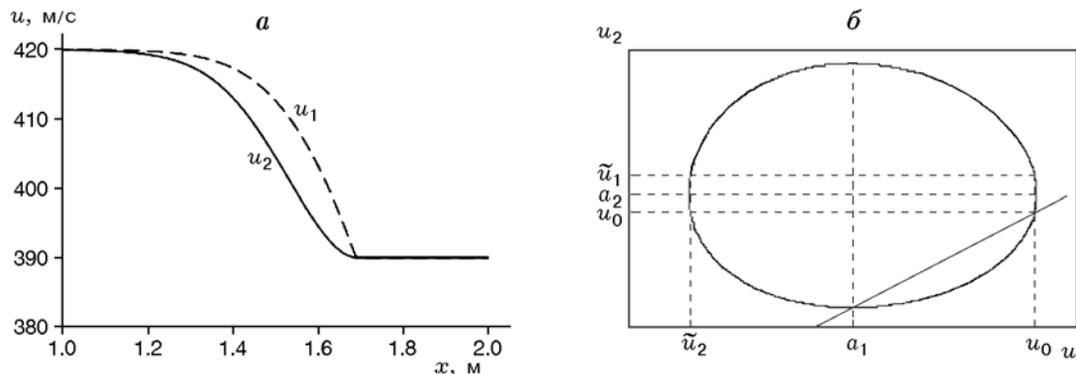


Рис. 7. Профиль скоростей стационарной дисперсионно-звуковой УВ (а) и ее схема в фазовом пространстве (б) при начальных параметрах $\xi_1 = \xi_{**} = 0.77, u_0 = 420$

скорости смеси. Если продолжить движение по этой ветке, то при достижении скоростью первой фазы скорости звука в течении возникнет градиентная катастрофа. Для преодоления этого обстоятельства вводится скачок в хвосте зоны релаксации в газовой фазе, посредством которого смесь приходит в конечное состояние K .

**Граница между областями Π_1, Π_2 .
Дисперсионно-замороженная трансзвуковая УВ**

Рассмотрим решение задачи (8), (9) для границы областей I_1, I_2 . Конечная скорость в этом случае равна скорости звука в первой фазе ($u_k = a_1$). Она может быть получена при фиксированном значении начальной скорости при соответствующем выборе относительной массовой концентрации, например, первой фазы: $\xi_1 = \xi_{**}$ (рис. 7). При этом отпадает необходимость введения хвостовой УВ в первой фазе. То есть существует стационарное решение без

опрокидывания в виде дисперсионной трансзвуковой по первой фазе УВ. Разрыв в точке K , которая сливается с K_1 , терпит лишь производная скорости газа. Конечно, возникает вопрос об устойчивости такой волны относительно взаимодействия с волной разрежения, который будет решаться в рамках одномерного нестационарного подхода. Однако, если поддерживать в хвосте волны граничное условие типа звуковой поршень по первой фазе, то течение будет устойчивым.

Область Π_2 . Полностью дисперсионная УВ

Если начальная скорость смеси лежат между скоростями звука в фазах и конечная скорость смеси больше скорости звука в первой фазе и меньше, чем во второй, реализуется полностью дисперсионная УВ, так как на данной ветви фазовой кривой $\Phi(u_1, u_2) = 0$ нет точек, где производные обращаются в бесконечность.

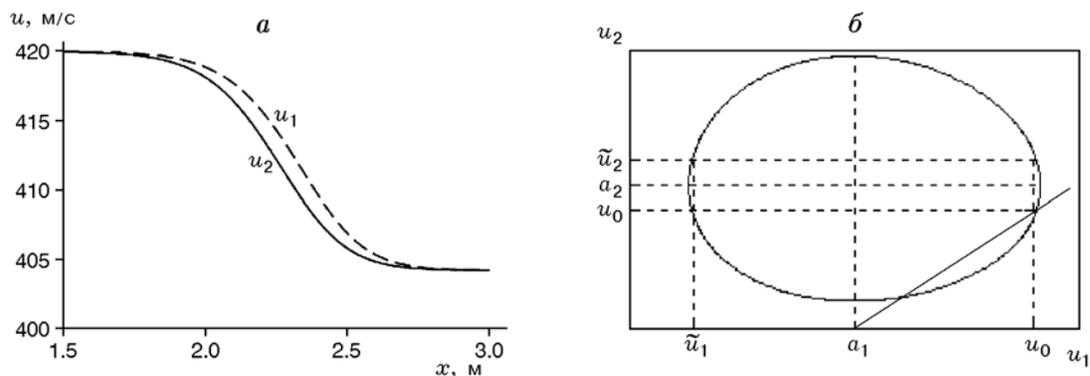


Рис. 8. Профиль скоростей стационарной дисперсионной УВ (а) и ее схема в фазовом пространстве (б) при начальных параметрах $\xi_1 = 0.65$, $u_0 = 420$

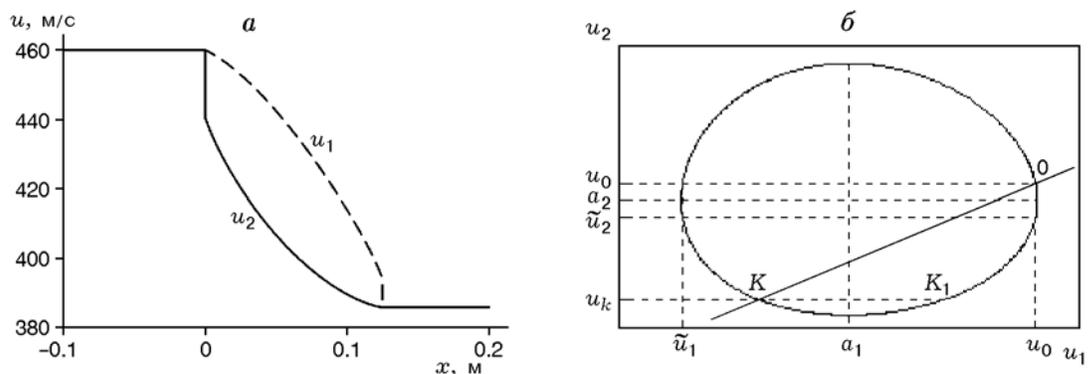


Рис. 9. Профиль скоростей стационарной замороженной двухфронтной УВ (а) и ее схема в фазовом пространстве (б) при начальных параметрах $\xi_1 = 0.5$, $u_0 = 460$

Решение асимптотически выходит из начального состояния, лежащего на минус бесконечности, и входит в конечное устойчивое состояние на плюс бесконечности (рис. 8). Начальное состояние в УВ находится слева.

Область III₁. Замороженная двухфронтная УВ

В области III₁ начальная скорость смеси больше скоростей звука в обеих фазах. Для того чтобы решение не опрокидывалось в точке разворота, вводится разрыв во второй фазе в голове УВ исходя из условий на замороженной УВ в этой фазе. Течение в первой фазе является непрерывным.

В случае, когда конечная скорость меньше скорости звука в газе, в хвосте зоны релаксации возникает скачок в газе. Образуется замороженная двухфронтная УВ, которая приводит смесь из точки равновесия K_1 по скорости первой фазы в точку равновесия K по скоростям обеих фаз (рис. 9).

Граница областей III₁, III₂. Замороженно-звуковая УВ

Аналогично решению на границе областей П₁ и П₂, существует решение с разрывом во второй фазе в голове УВ, при этом конечное равновесное состояние смеси совпадает со значением скорости звука в газе $u_k = a_1$. В данном случае возникает замороженно-звуковая УВ.

Область III₂. Замороженная УВ

В случае, когда конечная скорость смеси лежит между скоростями звука фаз, а начальная скорость больше обеих скоростей звука, реализуется замороженная УВ. При этом переход к конечному состоянию осуществляется следующим образом. Из условий на замороженной УВ находится состояние за этой УВ во второй фазе. Течение в первой фазе непрерывно. Затем в зоне релаксации непрерывно осуществляется переход к равновесию смеси, которое достигается на $x \rightarrow +\infty$ (рис. 10).

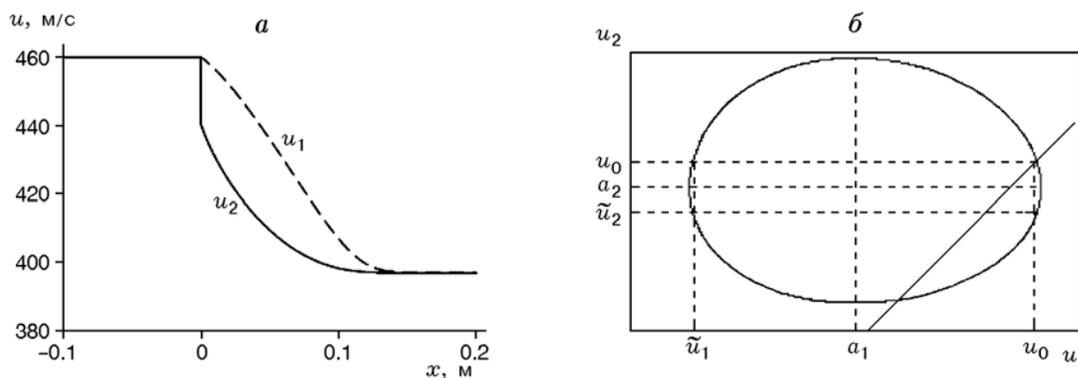


Рис. 10. Профиль скоростей стационарной замороженной УВ (а) и ее схема в фазовом пространстве (б) при начальных параметрах $\xi_1 = 0.4$, $u_0 = 460$

ВЫВОДЫ

В рамках математической модели типа Андерсона для описания течения смеси газа и твердых частиц с учетом их собственного давления, в приближении умеренной объемной концентрации частиц развита теория сильного разрыва, позволившая описать несколько типов ударных волн.

Проведены численные расчеты, иллюстрирующие эти структуры.

Автор благодарен И. А. Бедареву, А. В. Шульгину за проведенные расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zenit R., Hunt M. L., Brennen C. E. Collisional particle pressure measurement in solid-liquid flows // J. Fluid Mech. — 1997. — V. 353. — P. 216–283.
2. Glasser B. J., Kevrekids I. G., Sundars S. One- and two-dimensional traveling wave solutions in fluidized beds // J. Fluid Mech. — 1996. — V. 306. — P. 183–221.
3. Федоров А. В. Структура ударной волны в смеси двух твердых тел (гидродинамическое приближение) // Моделирование в механике: сб. науч. тр. / ИТПМ СО АН СССР. — Новосибирск, 1991. — Т. 5, № 4.
4. Федоров А. В., Федорова Н. Н. Структура, распространение и отражение ударных волн в смеси двух твердых тел (гидродинамическое приближение) // ПМТФ. — 1992. — № 4. — С. 10–18.
5. Федоров А. В. Структура комбинированного разрыва в газозвесах при наличии хаотического давления частиц // ПМТФ. — 1992. — № 5. — С. 36–41.
6. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. — М.: Машиностроение, 1974.
7. Гольдштик М. А., Козлов Б. Н. Элементарная теория концентрированных систем // ПМТФ. — 1973. — № 4. — С. 67–77.
8. Fitt A. D. The numerical and analytical solution of ill-posed systems of conservation laws // Appl. Math. Model. — 1989. — V. 13, November. — P. 618–631.
9. Hudson J., Hurriss D. A high resolution scheme for Eulerian gas-solid two-phase isentropic flow // J. Comp. Phys. — 2006. — V. 216. — P. 494–525.
10. Федоров А. В. Структура и распространение ударных и детонационных волн в реагирующих и не реагирующих газозвесах: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1992.
11. Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П., Фомин В. М., Шавалиев М. Ш. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. — Новосибирск: Наука, 1992. — С. 258.
12. Федоров А. В. Типы бегущих волн в газозвесах с хаотическим давлением // Динамика многофазных сред: материалы XIII Всерос. семинара (Новосибирск, 8–10 октября 2013 г.) / под ред. В. М. Фомина, А. В. Федорова. — Новосибирск, 2013. — С. 157–160.

Поступила в редакцию 3/X 2014 г.,
в окончательном варианте — 20/X 2014 г.